47th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD SLOVENIA 2006

day: **1**

language: **Afrikaans**

12 Julie 2006

**Probleem 1.** Laat $I$ die middelpunt van die ingeskrewe sirkel van $\triangle ABC$ wees, en $P$ 'n punt binne die driehoek sodat

$$P\hat{B}A + P\hat{C}A = P\hat{B}C + P\hat{C}B.$$

Bewys dat:

- $AP \geqslant AI$;
- gelykheid geld as en slegs as $P = I$.

**Probleem 2.** Gegee 'n reëlmatige 2006-hoek $P$. 'n Diagonaal van $P$ word *goed* genoem as sy eindpunte die rand van $P$ in twee dele verdeel wat elk uit 'n onewe aantal sye van $P$ bestaan. Die sye van $P$ word ook *goed* genoem.

Nou word $P$ opgedeel in driehoeke deur 2003 diagonale, waarvan geen twee 'n gemeenskaplike punt binne $P$ het nie. Vind die grootste aantal gelykbenige driehoeke met twee goeie sye wat op hierdie wyse kan ontstaan.

**Probleem 3.** Bepaal die kleinste reële getal $M$ waarvoor die ongelykheid

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leqslant M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

vir alle reële getalle $a$, $b$ en $c$ geld.

*Toegelate tyd: 4 uur 30 minute*
*Elke probleem tel 7 punte*