



2006年7月12日

一、 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心， P 是 $\triangle ABC$ 内部的一点， 满足

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

证明： $AP \geq AI$ ， 并说明等号成立的充分必要条件是 $P = I$ 。

二、 设 P 为正 2006 边形。 如果 P 的一条对角线的两端将 P 的边界分成两部分， 每部分都包含 P 的奇数条边， 那么该对角线称为“好边”。 规定 P 的每条边均为“好边”。

已知 2003 条在 P 内部不相交的对角线将 P 分割成若干三角形。 试问在这种分割之下， 最多有多少个有两条“好边”的等腰三角形。

三、 求最小的实数 M ， 使得对所有的实数 a, b 和 c ， 有

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

时间： 4 小时 30 分钟
每题 7 分