12. červenec 2006

Úloha 1. Nechť I je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a P jeho vnitřní bod, pro který platí

$$|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|.$$

Dokažte, že $|AP| \geq |AI|$, přičemž rovnost nastane, právě když $P = I$.

Úloha 2. Nechť P je pravidelný 2006-úhelník. Jeho úhlopříčka se nazývá *dobrá*, jestliže její koncové body dělí hranici mnohoúhelníku P na dvě části, z nichž každá je tvořena lichým počtem jeho stran. Každá strana mnohoúhelníku P je rovněž *dobrá*.

Předpokládejme, že P je rozdělen na trojúhelníky 2003 úhlopříčkami, z nichž žádné dvě nemají společný bod uvnitř P. Určete, jaký je největší možný počet rovnoramenných trojúhelníků, které v uvažovaném rozdělení mnohoúhelníku P mají dvě dobré strany.

Úloha 3. Určete nejmenší reálné číslo M takové, že nerovnost

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

platí pro všechna reálná čísla a, b, c.

Čas na vypracování: 4 hodiny 30 minut.
Za každou úlohu je možno získat 7 bodů.