12 Julie 2006

**Probleem 1.** Laat $I$ die middelpunt van die ingeskrewe sirkel van $\triangle ABC$ wees, en $P$ 'n punt binne die driehoek sodat

$$P\hat{B}A + P\hat{C}A = P\hat{B}C + P\hat{C}B.$$

Bewys dat:

- $AP \geqslant AI$;
- gelykheid geld as en slegs as $P = I$.

**Probleem 2.** Gegee 'n reëlmatige 2006-hoek $P$. 'n Diagonaal van $P$ word *goed* genoem as sy eindpunte die rand van $P$ in twee dele verdeel wat elk uit 'n onewe aantal sye van $P$ bestaan. Die sye van $P$ word ook *goed* genoem.

Nou word $P$ opgedeel in driehoeke deur 2003 diagonale, waarvan geen twee 'n gemeenskaplike punt binne $P$ het nie. Vind die grootste aantal gelykbenige driehoeke met twee goeie sye wat op hierdie wyse kan ontstaan.

**Probleem 3.** Bepaal die kleinste reële getal $M$ waarvoor die ongelykheid

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leqslant M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

vir alle reële getalle $a$, $b$ en $c$ geld.

*Toegelate tyd: 4 uur 30 minute*
*Elke probleem tel 7 punte*

12 Korrik 2006

**Problem 1.** Le të jetë $ABC$ një trekëndësh dhe $I$ qendra e rrethit brendashkruar tij. Një pikë $P$ e cila ndodhet brenda trekëndëshit plotëson kushtin

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Tregoni që $AP \geq AI$ dhe që barazimi ndodh atëherë dhe vetëm atëherë kur $P = I$.

**Problem 2.** Le të jetë $P$ një 2006-këndësh i rregullt. Një diagonale e $P$ quhet *e mirë* në qoftë se skajet e saj ndajnë konturin e $P$ në dy pjesë, secila prej të cilave përbëhet nga një numër tek brinjësh të $P$. Brinjët e $P$ quhen gjithashtu *të mira*. E zëmë se $P$ është ndarë në trekëndësha me anë të 2003 diagonaleve, çdo dy prej të cilave nuk kanë pikë të përbashkët brenda $P$. Gjeni numrin më të madh të trekëndëshave dybrinjënjëshëm me dy brinjë *të mira* të cilët mund të shfaqen në një konfiguracion të tillë.

**Problem 3.** Gjeni numrin real më të vogël $M$ të tillë që mosbarazimi

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

të plotësohet për të gjithë numrat realë $a$, $b$ dhe $c$.

*Koha e lejuar: 4 orë e 30 minuta*
*Çdo problem vlerësohet me 7 pikë*

12 July 2006

**السؤال الاول :**

ليكن $ABC$ مثلثا , و النقطه $I$ مركز الدائره الداخليه ( تقاطع منصفات الزوايا ) في المثلث . اذا كانت $P$ نقطه داخل المثلث بحيث تحقق المساواة

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

برهن أن $AP \geq AI$ , و المساواة ( $AP = AI$ ) تتحقق اذا و اذا فقط $P = I$ .

**السؤال الثاني :**

ليكن $P$ مضلع منتظم ذو 2006 ضلع . يسمى قطر المضلع $P$ جيد اذا جزأت نقطتا نهايتيه المضلع $P$ الى جزئين يحتوي كل جزء عدد فردي من اضلاع $P$ . أعتبر اضلاع المضلع $P$ جيده .
نفرض أن المضلع $P$ قسم الى مثلثات بواسطة 2003 قطرا , لا يتقاطع أي قطرين منهما داخل المضلع $P$ . أوجد اكبرعدد ممكن من المثلثات المتطابقة الضلعين التي تملك ضلعين جيده من اضلاع المضلع الناتجه بواسطة هذا النظام.

**السؤال الثالث :**

أوجد اصغر عدد حقيقي $M$ يحقق المتباينه

$$\left| ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) \right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

لكل الاعداد الحقيقية $a$ , $b$ و $c$ .

الوقت المتاح للأجابة : أربع ساعات و نصف الساعة
لكل مسأله 7 درجات فقط.

47th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD SLOVENIA 2006

day: **1**

language: **Armenian**

12-ը հուլիսի 2006թ.

**Խնդիր 1:** Դիցուք I կետը ABC եռանկյան ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է: P կետը եռանկյան ներսում ընտրված է այնպես, որ

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Ապացուցել, որ $AP \geq AI$: Հավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն ժամանակ, երբ P-ն համընկնում է I-ի հետ:

**Խնդիր 2:** P կանոնավոր 2006-անկյան անկյունագիծը կոչվում է «լավ», եթե նրա ծայրակետերը բաժանում են P-ի եզրագիծը երկու մասերի, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է կենտ թվով կողմեր: P բազմանկյան կողմերը նույնպես համարվում են լավ:

Ենթադրենք հատվածված է անկյունագծերի միջոցով: Դիցուք P-ն 2003 անկյունագծերի միջոցով տրոհված է եռանկյունների: Այդ անկյունագծերից ոչ մի երկուսը P-ի ներսում չունեն ընդհանուր կետեր:

Որքա՞ն առավելագույն թվով հավասարասրուն եռանկյուններ կարող է ունենալ այդպիսի տրոհումը, երբ այդ հավասարասրուն եռանկյուններից յուրաքանչյուրը ունի երկու լավ կողմ:

**Խնդիր 3:** Գտնել ամենափոքր M իրական թիվն այնպիսին, որ

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

անհավասարությունը ճիշտ է ցանկացած a, b, c իրական թվերի համար:

Աշխատանքի տևողությունը՝ 4ժ. 30րոպե:
Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է 7 միավոր:

الأربعاء 12 يوليوز 2006

Language : Moroccan Arabic

**التمرين 1 :**

ليكن $ABC$ مثلثا و ليكن $I$ مركز الدائرة المحاطة به .
$P$ نقطة داخل المثلث حيث : $P\hat{B}C + P\hat{C}B = P\hat{B}A + P\hat{C}A$ .
بين أن $AP \geq AI$ و أن هناك التساوي إذا ، و فقط إذا ، كان $P = I$ .

**التمرين 2 :**

نعتبر مضلعا منتظما $P$ له 2006 ضلعا . نقول أن قطرا في هذا المضلع *حسن* إذا كان طرفاه يقسمان حدود المضلع $P$ ( أي محيطه ) إلى جزئين ، كل واحد منهما يحتوي على عدد فردي من الأضلاع .
أضلاع المضلع $P$ تعتبر كذلك *حسنة* .
نفترض أن المضلع $P$ مجزء إلى مثلثات بواسطة 2003 قطرا من أقطار غير متقاطعة مثنى مثنى داخل المضلع .
بالنسبة لهذه التجزئة ، أوجد أكبر عدد ممكن للمثلثات المتساوية الساقين و التي تحتوي على ضلعين *حسنين* .

**التمرين 3 :**

أوجد أصغر عدد حقيقي $M$ بحيث تكون المتفاوتة :

$$\left| ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) \right| \leq M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

صحيحة لكل $a$ و $b$ و $c$ من مجموعة الأعداد الحقيقية .

---

مدة الإنجاز : 4 ساعات و نصف
تمنح 7 نقط عن كل تمرين

47th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD SLOVENIA 2006

day: 1

language: Arabic (Kuwaiti)

## الأربعاء 12 يوليو 2006

**التمرين 1 :**

أ ب جـ مثلث ، م مركز الدائرة الداخلة للمثلث أ ب جـ .
ن نقطة تقع داخل المثلث والتي تحقق :
<ن ب أ + <ن جـ أ = <ن ب جـ + <ن جـ ب
برهن أن أ ن ≤ أ م و أن المساواة تتحقق إذا و إذا فقط ن = م

**التمرين2:**

بفرض ل مضلع ذو 2006 ضلع. القطر فى هذا المضلع يسمى جيد أذا كانت نقطتا النهاية فية تقسم الشكل الى جزئين , وكل جزء يحتوي على عدد فردي من الاضلاع في ل, الاضلاع فى ل أيظا تسمى جيد . وبفرض ان المضلع المنتظم ل قد جزئ الي مثلثات عن طريق2003 من الاقطار حيث لا يوجد أى قطرين يشتركان في نقطة واحدة داخل ل. اوجد اكبر عدد من المثلثات المتطابقة الضلعين ذات ضلعين فرديين و بالامكان تواجدها بداخل هذا الشكل .

**التمرين 3 :**

عين أصغر عدد م ينتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية و التي تحقق المتباينة :

| اب (ا² - ب²) + ب ج (ب² - ج²) + ج ا (ج² - ا²) | ≤ م (ا² + ب² + ج²)²

حيث ا , ب , ج ينتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية

الزمن اربع ساعات و نصف      7 درجات لكل سؤال

12 iyul 2006-ci il

**Məsələ 1.** $I$ nöqtəsi $ABC$ üçbucağının daxilinə çəkililmiş çevrənin mərkəzidir.
$P$ nöqtəsi bu üçbucağın daxilində yerləşir və

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB .$$

münasibəti ödənilir. Isbat edin ki, $AP \geq AI$ və göstərin ki , bu bərabərsizlikdə bərabərlik hali yalnız və yalnız $P = I$ olduqda mümkündür.

**Məsələ 2.** Düzgün 2006-bucaqlının diaqonalının uc nöqtələri bu çoxbucaqlının sərhədini hər biri tək sayda tərəfdən ibarət iki hissəyə ayırırsa, belə diaqonal *tək* adlanır. Çoxbucaqlının hər bir tərəfi də *tək* hesab edilir.

Tutaq ki, bu düzgün 2006-bucaqlı, çoxbucaqlının daxilində kəsişməyən 2003 sayda diaqonallar vasitəsi ilə üçbucaqlara bölünmüşdür. Bu bölgüdə alınmış və iki tərəfi *tək* olan bərabəryanlı üçbucaqların mümkün maksimal sayını tapın.

**Məsələ 3.** Elə ən kiçik $M$ ədədini tapın ki, istənilən həqiqi $a$, $b$, $c$ ədədləri üçün

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

bərabərsizliyi doğru olsun .

*Ayrılmış vaxt: 4,5 saat*
*Hər məsələ 7 balla qiymətləndirilir*

12. juli 2006.

**Zadatak 1.** Neka je $I$ centar upisane kružnice trougla $ABC$. U unutrašnjosti trougla $ABC$ data je tačka $P$ takva da je

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB .$$

Dokazati da je $AP \geq AI$, te da jednakost vrijedi ako i samo ako se tačka $P$ podudara sa tačkom $I$.

**Zadatak 2.** Neka je $P$ pravilan poligon sa 2006 stranica. Za dijagonalu poligona $P$ kažemo da je *dobra* ako njene krajnje tačke dijele rub od $P$ na dva dijela, tako da se svaki od njih sastoji od neparnog broja stranica poligona $P$. Za stranice poligona $P$ takođe kažemo da su *dobre*.

Posmatramo podjele poligona $P$ na trouglove pomoću 2003 dijagonale, tako da nikoje dvije među tim dijagonalama nemaju zajedničku tačku u unutrašnjosti poligona $P$. Odrediti maksimalni broj jednakokrakih trouglova sa dvije dobre stranice, koji se mogu dobiti pri nekoj takvoj podjeli.

**Zadatak 3.** Odrediti najmanji realan broj $M$ takav da nejednakost

$$\left| ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) \right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

vrijedi za sve realne brojeve $a$, $b$ i $c$.

*Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta*
*Svaki zadatak vrijedi 7 bodova*

12 Юли 2006

**Задача 1.** Нека $ABC$ е триъгълник с център на вписаната окръжност $I$. Точка $P$ от вътрешността на триъгълника е такава, че

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Да се докаже, че $AP \geq AI$, като равенството се достига тогава и само тогава, когато $P = I$.

**Задача 2.** Нека $P$ е правилен 2006-ъгълник. Диагонал на $P$ се нарича *добър*, ако краищата му делят контура на $P$ на две части, всяка от които се състои от нечетен брой страни. Страните на $P$ също се считат за *добри*.

Нека $P$ е разделен на триъгълници посредством 2003 диагонала, никои два от които не се пресичат във вътрешността на $P$. Да се намери максималният брой равнобедрени триъгълници с две добри страни, които могат да се получат при такова разделяне на $P$.

**Задача 3.** Да се намери най-малкото реално число $M$, за което неравенството

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

е изпълнено за произволни реални числа $a$, $b$ и $c$.

*Време за работа: 4 часа 30 минути*
*Всяка задача се оценява със 7 точки*

2006 年 7 月 12 日

一、 设 $I$ 为 $\Delta ABC$ 的内心， $P$ 是 $\Delta ABC$ 内部的一点， 满足

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

证明： $AP \geq AI$， 并说明等号成立的充分必要条件是 $P = I$.

二、 设 $P$ 为正 2006 边形. 如果 $P$ 的一条对角线的两端将 $P$ 的边界分成两部分，每部分都包含 $P$ 的奇数条边，那么该对角线称为“好边”. 规定 $P$ 的每条边均为“好边”.

已知 2003 条在 $P$ 内部不相交的对角线将 $P$ 分割成若干三角形. 试问在这种分割之下，最多有多少个有两条“好边”的等腰三角形.

三、 求最小的实数 $M$， 使得对所有的实数 $a$, $b$ 和 $c$， 有

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2.$$

*时间：4 小时 30 分钟*
*每题 7 分*

2006 年 7 月 12 日

**Problem 1.** 令 $I$ 爲三角形 $ABC$ 的內心, 點 $P$ 在三角形的內部, 滿足

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

試證: $AP \geq AI$, 且等號成立的充份必要條件爲 $P = I$.

**Problem 2.** 令 $P$ 爲正 2006 邊形。如果 $P$ 的一條對角線的兩端將 $P$ 的邊界分成兩部分, 每部分皆包含 $P$ 的奇數條邊, 則稱此對角線爲“好邊”。規定 $P$ 的每條邊也是“好邊”。

已知 2003 條在 $P$ 內部不相交的對角線將 $P$ 分割成若干個三角形。試問在這種分割之下, 最多有多少個有二條 “好邊” 的等腰三角形。

**Problem 3.** 試求最小的實數 $M$, 使得不等式

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

對所有實數 $a, b$ 與 $c$ 都成立。

考試時間:*4* 小時 *30* 分

每題 *7* 分

12. červenec 2006

**Úloha 1.** Nechť $I$ je střed kružnice vepsané trojúhelníku $ABC$ a $P$ jeho vnitřní bod, pro který platí

$$|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|.$$

Dokažte, že $|AP| \geq |AI|$, přičemž rovnost nastane, právě když $P = I$.

**Úloha 2.** Nechť $P$ je pravidelný 2006-úhelník. Jeho úhlopříčka se nazývá *dobrá*, jestliže její koncové body dělí hranici mnohoúhelníku $P$ na dvě části, z nichž každá je tvořena lichým počtem jeho stran. Každá strana mnohoúhelníku $P$ je rovněž *dobrá*.

Předpokládejme, že $P$ je rozdělen na trojúhelníky 2003 úhlopříčkami, z nichž žádné dvě nemají společný bod uvnitř $P$. Určete, jaký je největší možný počet rovnoramenných trojúhelníků, které v uvažovaném rozdělení mnohoúhelníku $P$ mají dvě dobré strany.

**Úloha 3.** Určete nejmenší reálné číslo $M$ takové, že nerovnost

$$\left| ab(a^2-b^2) + bc(b^2-c^2) + ca(c^2-a^2) \right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

platí pro všechna reálná čísla $a$, $b$, $c$.

*Čas na vypracování: 4 hodiny 30 minut.*
*Za každou úlohu je možno získat 7 bodů.*

12. juli 2006

**Opgave 1.** Lad $ABC$ være en trekant, og lad $I$ være centrum i den indskrevne cirkel. Et punkt $P$ i det indre af trekanten opfylder

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Vis at $AP \geq AI$, og at lighed gælder hvis og kun hvis $P = I$.

**Opgave 2.** Lad $P$ være en regulær 2006-kant. En diagonal i $P$ kaldes *god* hvis dens endepunkter deler randen af $P$ i to dele begge bestående af et ulige antal kanter fra $P$. Kanterne i $P$ kaldes også *gode*.

$P$ deles op i 2003 trekanter af diagonaler der parvis ikke har skæringspunkter i det indre af $P$. Find det maksimale antal ligebenede trekanter med to gode sider, der kan fremkomme ved en sådan opdeling.

**Opgave 3.** Bestem det mindste reelle tal $M$ sådan at uligheden

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

gælder for alle reelle tal $a$, $b$ og $c$.

*Tilladt tid: 4 timer og 30 minutter*
*Hver opgave er 7 point værd*

12. Juli 2006

**Aufgabe 1.** Es sei $ABC$ ein Dreieck mit dem Inkreismittelpunkt $I$. Für einen Punkt $P$ im Innern des Dreiecks gelte:

$$\sphericalangle PBA + \sphericalangle PCA = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB$$

Man beweise:

- $\overline{AP} \geq \overline{AI}$
- Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $P = I$ gilt.

**Aufgabe 2.** Gegeben sei ein regelmäßiges 2006-Eck $P$. Eine Diagonale von $P$ heiße *gut*, wenn deren Endpunkte den Rand von $P$ in zwei Teile zerlegen, die jeweils aus einer ungeraden Anzahl von Seiten von $P$ bestehen. Auch die Seiten von $P$ heißen *gut*.
Nun werde $P$ durch 2003 Diagonalen in Dreiecke zerlegt, wobei keine zwei Diagonalen einen Schnittpunkt im Innern von $P$ haben. Man bestimme die maximale Anzahl von gleichschenkligen Dreiecken mit zwei guten Dreiecksseiten, die in einer solchen Zerlegung von $P$ auftreten können.

**Aufgabe 3.** Man bestimme die kleinste reelle Zahl $M$, so dass für alle reellen Zahlen $a$, $b$ und $c$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

*Arbeitszeit: 4 $\frac{1}{2}$ Stunden*
*Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.*

12 juli 2006

**Opgave 1.** Zij $ABC$ een driehoek en $I$ het middelpunt van de ingeschreven cirkel. Voor een punt $P$ in het inwendige van de driehoek geldt:

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Bewijs dat $AP \geq AI$, en dat gelijkheid geldt dan en slechts dan als $P = I$.

**Opgave 2.** Zij $P$ een regelmatige 2006-hoek. Een diagonaal van $P$ noemen we *goed* als zijn eindpunten de rand van $P$ verdelen in twee stukken die beide bestaan uit een oneven aantal zijden van $P$. De zijden van $P$ noemen we ook *goed*.

Stel dat $P$ door 2003 diagonalen in driehoeken wordt verdeeld, zodanig dat geen twee diagonalen elkaar snijden in het inwendige van $P$. Bepaal het grootste aantal gelijkbenige driehoeken met twee goede zijden die in zo'n verdeling van $P$ kunnen voorkomen.

**Opgave 3.** Bepaal het kleinste reële getal $M$ zodanig dat voor alle reële getallen $a$, $b$ en $c$ de volgende ongelijkheid geldt:

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

*Beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur*
*Voor iedere opgave maximaal 7 punten*

12 July 2006

**Problem 1.** Let $ABC$ be a triangle with incentre $I$. A point $P$ in the interior of the triangle satisfies

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Show that $AP \geq AI$, and that equality holds if and only if $P = I$.

**Problem 2.** Let $P$ be a regular 2006-gon. A diagonal of $P$ is called *good* if its endpoints divide the boundary of $P$ into two parts, each composed of an odd number of sides of $P$. The sides of $P$ are also called *good*.

Suppose $P$ has been dissected into triangles by 2003 diagonals, no two of which have a common point in the interior of $P$. Find the maximum number of isosceles triangles having two good sides that could appear in such a configuration.

**Problem 3.** Determine the least real number $M$ such that the inequality

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

holds for all real numbers $a$, $b$ and $c$.

*Time allowed: 4 hours 30 minutes*
*Each problem is worth 7 points*

12. juuli 2006

**Ülesanne 1.** Olgu $ABC$ kolmnurk ja $I$ tema siseringjoone keskpunkt. Punkt $P$ selle kolmnurga sees rahuldab tingimust

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Näita, et $|AP| \geqslant |AI|$, kus võrdus kehtib parajasti siis, kui $P = I$.

**Ülesanne 2.** Olgu $P$ korrapärane 2006-nurk. $P$ diagonaali nimetame "heaks", kui tema otspunktid jaotavad $P$ rajajoone kaheks osaks, mis kumbki koosneb paaritust arvust $P$ külgedest. $P$ külgi nimetame samuti "headeks".

Vaatleme $P$ jaotusi kolmnurkadeks 2003 sellise diagonaaliga, millest ühelgi kahel ei ole $P$ sees ühist punkti. Leia suurim kahe "hea" küljega võrdhaarsete kolmnurkade arv, mis saab sellises jaotuses esineda.

**Ülesanne 3.** Leia vähim selline reaalarv $M$, et võrratus

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leqslant M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

kehtib kõigi reaalarvude $a$, $b$ ja $c$ korral.

*Aega on 4 tundi 30 minutit.*
*Iga ülesanne maksab 7 punkti.*

12. heinäkuuta 2006

**Tehtävä 1.** Kolmion $ABC$ sisään piirretyn ympyrän keskipiste on $I$. Kolmion sisäpiste $P$ toteuttaa ehdon

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Osoita, että $AP \geq AI$ ja että yhtäsuuruus vallitsee, jos ja vain jos $P = I$.

**Tehtävä 2.** Kutsumme säännöllisen 2006-kulmion $P$ lävistäjää *hyväksi janaksi*, jos sen päätepisteet jakavat $P$:n piirin kahteen osaan, joista kumpikin koostuu parittomasta määrästä $P$:n sivuja. Myös $P$:n sivuja pidetään *hyvinä janoina*.

Monikulmio $P$ jaetaan kolmioiksi 2003:lla lävistäjällä, jotka eivät leikkaa toisiaan $P$:n sisällä. Määritä sellaisten jaossa syntyvien tasakylkisten kolmioiden, joiden sivuista kaksi on hyviä janoja, suurin mahdollinen lukumäärä.

**Tehtävä 3.** Määritä pienin reaaliluku $M$, jolle epäyhtälö

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

toteutuu kaikilla reaaliluvuilla $a$, $b$ ja $c$.

*Työaikaa 4 tuntia 30 minuuttia.*
*Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 7.*

12 juillet 2006

**Problème 1.** Soit $ABC$ un triangle et $I$ le centre de son cercle inscrit. Un point $P$ intérieur au triangle vérifie

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Montrer que $AP \geq AI$ et que l'égalité a lieu si et seulement si $P = I$.

**Problème 2.** Soit $P$ un polygone régulier à 2006 côtés. Une diagonale de $P$ est appelée *bonne* si ses extrémités partagent le contour de $P$ en deux parties ayant chacune un nombre impair de côtés de $P$. Les côtés de $P$ sont aussi appelés *bons*.

On suppose que $P$ a été subdivisé en triangles par 2003 diagonales n'ayant deux à deux aucun point commun à l'intérieur de $P$. Trouver le nombre maximum de triangles isocèles ayant deux côtés bons qui peuvent apparaître dans une telle subdivision.

**Problème 3.** Trouver le plus petit réel $M$ tel que l'inégalité

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

soit vérifiée pour tous nombres réels $a$, $b$ et $c$.

*Temps accordé: 4 heures et demie*
*Chaque problème vaut 7 points*

47th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
SLOVENIA 2006

day: **1**

language: **Georgian**

12 ივნისი 2006 წელი

**ამოცანა 1.** ვთქვათ $I$ არის $ABC$ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი. ამ სამკუთხედის შიგნით აღებულია $P$ წერტილი ისე, რომ

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

დაამტკიცეთ, რომ $AP \geq AI$ და ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $P$ ემთხვევა $I$-ს.

**ამოცანა 2.** ვთქვათ $P$ არის წესიერი 2006-კუთხედი. $P$-ს დიაგონალს ეწოდება კარგი, თუ მისი ბოლოები $P$-ს საზღვარს ყოფს ორ ნაწილად, რომელთაგან თითოეული შეიცავს კენტ რაოდენობის გვერდებს. $P$-ს გვერდებს აგრეთვე ეწოდება კარგი.

ვთქვათ $P$ დაყოფილია სამკუთხედებად 2003 დიაგონალით, რომელთაგან არცერთ ორს არა აქვს საერთო წერტილი $P$-ს შიგნით. იპოვეთ, ასეთი წესით დაყოფისას, მაქსიმალური რაოდენობა იმ ტოლფერდა სამკუთხედებისა, რომელთაც აქვთ ორი კარგი გვერდი.

**ამოცანა 3.** იპოვეთ უმცირესი ნამდვილი რიცხვი $M$, რომლისთვისაც უტოლობა

$$\left|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)\right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

სრულდება ყველა $a$, $b$ და $c$ ნამდვილი რიცხვებისათვის.

მუშაობის დრო 4 სთ. და 30 წთ.
თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით.

12 Ιουλίου 2006

**Πρόβλημα 1.** Δίνεται τρίγωνο $ABC$ με κέντρο εγγεγραμμένου κύκλου το σημείο $I$. Ένα σημείο $P$ στο εσωτερικό του τριγώνου ικανοποιεί την ισότητα

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Να αποδειχθεί ότι $AP \geq AI$, και ότι η ισότητα ισχύει τότε και μόνο τότε αν $P = I$.

**Πρόβλημα 2.** Έστω $P$ ένα κανονικό 2006-γωνο. Μια διαγώνιος του $P$ καλείται *καλή* αν τα άκρα της διαιρούν το σύνορο του $P$ σε δυο μέρη, το καθένα από τα οποία αποτελείται από περιττό αριθμό πλευρών του $P$. Οι πλευρές του $P$ επίσης καλούνται *καλές*.

Υποθέτουμε ότι το $P$ έχει διαμερισθεί σε τρίγωνα από 2003 διαγώνιες, οποιεσδήποτε δυο από τις οποίες δεν έχουν κοινό σημείο στο εσωτερικό του $P$. Να βρεθεί ο μέγιστος αριθμός των ισοσκελών τριγώνων με δυο καλές πλευρές που μπορούν να εμφανισθούν σε μια τέτοια διαμέριση.

**Πρόβλημα 3.** Να υπολογισθεί ο ελάχιστος πραγματικός αριθμός $M$ τέτοιος ώστε η ανισότητα

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

να ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς $a$, $b$ και $c$.

*Διάρκεια εξέτασης: 4 ώρες και 30 λεπτά*
*Μέγιστη βαθμολογία κάθε προβλήματος: 7 μονάδες*

12 ביולי 2006

**שאלה מספר 1.**

יהי $ABC$ משולש שמרכז המעגל החסום שלו הוא $I$. נקודה $P$ הנמצאת בתוך המשולש מקיימת את השוויון

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

הוכח כי $AP \geq AI$ וכי שוויון מתקיים אם ורק אם $P = I$.

**שאלה מספר 2.**

יהי $P$ מצולע משוכלל בעל 2006 צלעות. אלכסון של $P$ נקרא *טוב* אם שני קצותיו מחלקים את ההיקף של $P$ לשני חלקים, שכל אחד מהם מורכב ממספר איזוגי של צלעות של $P$. הצלעות של המצולע $P$ נקראות גם הן *טובות*.

נניח כי המצולע $P$ חולק למשולשים על ידי העברת 2003 אלכסונים, כך שאין בהם שני אלכסונים בעלי נקודה משותפת הנמצאת בתוך המצולע $P$. מצא את המספר הגדול ביותר של משולשים שווי שוקיים, שיש להם שתי צלעות טובות, אשר יכולים להתקבל בתצורה כזאת.

**שאלה מספר 3.**

מצא את המספר הממשי $M$ הקטן ביותר, כך שאי השוויון

$$\left| ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) \right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

מתקיים עבור כל שלושה מספרים ממשיים $a, b, c$.

הזמן המוקצה: ארבע שעות ו 30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות

12. srpnja 2006.

**Zadatak 1.** Neka je $I$ središte upisane kružnice trokuta $ABC$. U unutrašnjosti trokuta $ABC$ dana je točka $P$ takva da je

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Dokažite da je $|AP| \geq |AI|$, te da jednakost vrijedi ako i samo ako se točka $P$ podudara sa točkom $I$.

**Zadatak 2.** Neka je $P$ pravilni poligon sa 2006 stranica. Za dijagonalu poligona $P$ kažemo da je *dobra* ako njezine krajnje točke dijele rub od $P$ na dva dijela, tako da se svaki od njih sastoji od neparnog broja stranica poligona $P$. Za stranice poligona $P$ također kažemo da su *dobre*.

Promatrajmo podjele poligona $P$ na trokute pomoću 2003 dijagonale, tako da nikoje dvije među tim dijagonalama nemaju zajedničku točku u unutrašnjosti poligona $P$. Nađite maksimalni broj jednakokračnih trokuta s dvije dobre stranice, koji se mogu dobiti pri nekoj takvoj podjeli.

**Zadatak 3.** Odredite najmanji realni broj $M$ takav da nejednakost

$$\left| ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) \right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

vrijedi za sve realne brojeve $a$, $b$ i $c$.

*Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta*
*Svaki zadatak vrijedi 7 bodova*

2006. július 12.

**1. Feladat** Az $ABC$ háromszög beírt körének középpontja legyen $I$. A háromszög $P$ belső pontja kielégíti a

$$PBA\sphericalangle + PCA\sphericalangle = PBC\sphericalangle + PCB\sphericalangle$$

egyenlőséget. Bizonyítsuk be, hogy $AP \geqslant AI$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $P = I$.

**2. Feladat** Legyen $P$ egy szabályos 2006-szög. $P$ egy átlóját *jó*nak nevezzük, ha a végpontjai $P$ határát két olyan részre bontják, amelyek mindegyike $P$ páratlan sok oldalát tartalmazza. Az oldalakat szintén *jó*nak nevezzük.

Tegyük fel, hogy $P$-t háromszögekre bontottuk 2003 olyan átlóval, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös pontja $P$ belsejében. Határozzuk meg az ilyen felbontásokban előforduló egyenlőszárú, két jó oldallal rendelkező háromszögek számának maximumát.

**3. Feladat** Határozzuk meg a legkisebb olyan $M$ valós számot, amire az

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leqslant M\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2$$

egyenlőtlenség teljesül minden $a$, $b$, $c$ valós számra.

*Munkaidő: 4 és fél óra.*
*Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.*

12. júlí 2006

**Dæmi 1.** Látum $ABC$ vera þríhyrning með innmiðju $I$. Um punkt $P$ innaní þríhyrningnum gildir

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Sýnið að $AP \geq AI$, og að jafnaðarmerkið gildir þá og því aðeins að $P = I$.

**Dæmi 2.** Látum $P$ vera reglulegan 2006-hyrning. Hornalína í $P$ er sögð vera *góð* ef endapunktar hennar skipta jaðri $P$ í tvo hluta sem hver um sig samanstendur af oddatölufjölda hliða í $P$. Hliðar $P$ eru einnig sagðar vera *góðar*.

Nú er $P$ skipt niður í þríhyrninga með 2003 hornalínum, þannig að engar tvær hornalínur hafi sameiginlegan punkt innaní $P$. Finnið mesta fjölda jafnarma þríhyrninga með tvær góðar hliðar sem geta komið fyrir í slíkri skiptingu.

**Dæmi 3.** Finnið lægstu rauntölu $M$ þannig að ójafnan

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

gildi fyrir allar rauntölur $a$, $b$ og $c$.

*Tími: $4\frac{1}{2}$ klukkustundir*
*Hvert dæmi er sjö stiga virði*

12 luglio 2006

**Problema 1.** Sia $ABC$ un triangolo e sia $I$ il centro della sua circonferenza inscritta. Sia $P$ un punto interno al triangolo tale che

$$P\widehat{B}A + P\widehat{C}A = P\widehat{B}C + P\widehat{C}B.$$

Dimostrare che $AP \geq AI$ e che vale l'uguaglianza se e solo se $P = I$.

**Problema 2.** Sia $P$ un 2006-agono regolare. Una diagonale di $P$ si dice *buona* se i suoi estremi dividono il bordo di $P$ in due parti ognuna delle quali è composta da un numero dispari di lati di $P$. I lati di $P$ sono considerati anch'essi *buoni*.

Supponiamo che $P$ sia stato suddiviso in triangoli da 2003 diagonali che a due a due non hanno nessun punto in comune all'interno di $P$. Determinare il massimo numero di triangoli isosceli aventi due lati buoni che possono apparire in una tale suddivisione.

**Problema 3.** Determinare il più piccolo numero reale $M$ tale che la disuguaglianza

$$\left| ab(a^2-b^2) + bc(b^2-c^2) + ca(c^2-a^2) \right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

sia soddisfatta per tutti i numeri reali $a$, $b$, $c$.

*Tempo; 4 ore e 30 minuti*
*Ogni problema vale 7 punti*

2006 年 7 月 12 日

**問題 1.**　三角形 $ABC$ の内心を $I$ とする．点 $P$ がこの三角形の内部にあって，等式

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

をみたすとき，$AP \geqq AI$ を示せ．

　また，この不等式において等号が成立するための必要十分条件は $P = I$ であることを示せ．

**問題 2.**　正 2006 角形 $P$ がある．$P$ の対角線で次の条件をみたすものを**奇線**とよぶことにする：対角線の両端点で $P$ の周を 2 つの部分に分けたとき，各部分は奇数個の辺を含む．

　また，$P$ の各辺も**奇線**とよぶ．

　$P$ を，端点以外では共通点をもたない 2003 本の対角線で三角形に分割するとき，2 辺が奇線であるような二等辺三角形の個数のとりうる最大値を求めよ．

**問題 3.**　任意の実数 $a$, $b$, $c$ に対して不等式

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leqq M\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2$$

が成り立つような最小の実数 $M$ を求めよ．

試験時間：4 時間 30 分

各問 7 点

2006년 7월 12일

**Problem 1.** 삼각형 $ABC$ 의 내심을 $I$ 라 하자. 삼각형 내부의 한 점 $P$ 에 대하여,

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

이 성립한다. 이때, $AP \geq AI$ 임을 보이고, 등호가 성립할 필요충분조건은 $P = I$ 임을 보여라.

**Problem 2.** 정 2006 각형 $P$ 에서, 어떤 대각선의 양쪽에 있는 변들의 개수가 각각 홀수일 때, 그 대각선을 '홀대각선'이라 부르자. 단, $P$ 의 변들은 모두 홀대각선으로 간주한다.

정 2006 각형 $P$ 가 2003 개의 대각선에 의해 삼각형들로 분할되었다고 하자. 단, 어떤 두 대각선도 $P$ 의 내부에서 교차하지 않는다. 이러한 분할에 의해 생기는 삼각형들 중, 두 개의 홀대각선을 변으로 갖는 이등변삼각형의 최대 개수를 구하여라.

**Problem 3.** 모든 실수 $a, b, c$ 에 대하여 다음의 부등식을 만족하는 실수 $M$ 의 최소값을 구하여라.

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

*제한시간: 4시간 30분*
*문항당 7점*

2006. gada 12. jūlijā

**1. uzdevums.** Trijstūrī $ABC$ ievilktās riņķa līnijas centrs ir $I$. Punkts $P$ atrodas trijstūra iekšpusē un apmierina sakarību

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB\,.$$

Pierādiet, ka $AP \geq AI$ un ka vienādība ir spēkā tad un tikai tad, ja punkts $P$ sakrīt ar punktu $I$.

**2. uzdevums.** Pieņemsim, ka $P$ ir regulārs 2006-stūris. Daudzstūra $P$ diagonāli sauc par *labu*, ja tās galapunkti sadala $P$ kontūru divās daļās, katra no kurām satur nepāra skaitu daudzstūra $P$ malu. Arī daudzstūra $P$ malas sauc par *labām*.

Pieņemsim, ka daudzstūris $P$ ir sadalīts trijstūros, novelkot 2003 diagonāles, nekādām divām no kurām nav kopīgu punktu daudzstūra $P$ iekšpusē. Kāds ir lielākais šādā sadalījumā iespējamais tādu vienādsānu trijstūru skaits, kuriem ir pa divām *labām* malām?

**3. uzdevums.** Noskaidrojiet, kāds ir vismazākais reālais skaitlis $M$, ar kuru nevienādība

$$\left| ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) \right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

ir spēkā visiem reāliem skaitļiem $a$, $b$ un $c$.

*Risināšanas laiks: 4 stundas 30 minūtes*
*Katrs uzdevums ir 7 punktus vērts*

2006 m. liepos 12 d.

**1 uždavinys.** Trikampio $ABC$ įbrėžtinio apskritimo centras yra $I$. Trikampio viduje paimtas toks taškas $P$, kad $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Įrodykite, kad $AP \geq AI$, ir lygybė teisinga tada ir tik tada, kai $P = I$.

**2 uždavinys.** Taisyklingojo 2006-kampio $P$ įstrižainę vadiname gera, jeigu jos galiniai taškai dalija daugiakampio kontūrą į dvi dalis, kurių kiekvieną sudaro nelyginis kraštinių skaičius. Daugiakampio $P$ kraštines taip pat vadiname geromis. Tarkime, kad $P$ suskaidytas į trikampius 2003 įstrižainėmis, kurių jokios dvi neturi bendrų taškų $P$ viduje. Raskite, kiek daugiausia tame skaidinyje gali būti lygiašonių trikampių, turinčių dvi geras kraštines.

**3 uždavinys.** Raskite mažiausią realųjį skaičių $M$ tokį, kad nelygybė

$$\left|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)\right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

būtų teisinga su visais realiaisiais skaičiais $a$, $b$ ir $c$.

Skirtas laikas 4 h 30 min

Kiekvienas uždavinys vertinamas 7 taškais

12 Јули, 2006

**Задача 1.** Нека $I$ е центарот на впишаната кружница во триаголник $ABC$. Во внатрешноста на триаголникот е избрана точка $P$, таква да

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Докажи дека $AP \geq AI$, и дека равенството важи ако и само ако точката $P$ се совпаѓа со точката $I$.

**Задача 2.** Нека $P$ е правилен многуаголник со 2006 страни. За дијагоналата на $P$ велиме дека е *добра* ако нејзините крајни точки ја делат границата на $P$ на два дела, така да секој од нив се состои од непарен број на страни од $P$. Страните на $P$ исто така ги нарекуваме *добри*.

Да ги разгледаме поделбите на многуаголникот $P$ на триаголници со помош на 2003 дијагонали, така да кои било две од тие дијагонали немаат заедничка точка во внатрешноста на $P$. Одреди го максималниот број на рамнокраки триаголници со две добри страни, кои може да се добијат при некоја таква поделба.

**Задача 3.** Најди го најмалиот реален број $M$, таков да неравенството

$$\left| ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) \right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

важи за сите реални броеви $a$, $b$ и $c$.

*Време за работа: 4 часа и 30 минути*

*Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода*

12 Julai 2006

**Masalah 1.** Misalkan $ABC$ suatu segitiga dengan pusat-dalam $I$. Suatu titik $P$ di pedalaman segitiga memenuhi

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Tunjukkan bahawa $AP \geq AI$, dan kesamaan berlaku jika dan hanya jika $P = I$.

**Masalah 2.** Misalkan $P$ suatu 2006-gon sekata. Suatu pepenjuru bagi $P$ dinamakan *baik* jika titik-hujungnya membahagi sempadan bagi $P$ kepada dua bahagian, yang masing-masingnya mempunyai bilangan ganjil sisi bagi $P$. Sisi bagi $P$ adalah juga dinamakan *baik*.

Misalkan $P$ telah dibelah ke dalam segitiga oleh 2003 pepenjuru, yang tiada pasangan pepenjuru mempunyai titik sepunya di dalam pedalaman bagi $P$. Cari bilangan maksimum segitiga sama sisi dengan dua sisi *baik* yang boleh terjadi di dalam konfigurasi tersebut.

**Masalah 3.** Tentukan nombor nyata terkecil $M$ sedemikian hingga ketaksamaan

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

berlaku untuk semua nombor nyata $a$, $b$ dan $c$.

*Masa dibenarkan: 4 jam 30 minit*
*Setiap masalah bernilai 7 markah*

2006 оны 7 сарын 12

**Бодлого 1.** ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв I байг. Уг гурвалжны дотор P цэгийг

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

байхаар авав. $AP \geq AI$ болохыг баталж, тэнцэл биелэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь P цэг I-тэй давхцах явдал гэж батал.

**Бодлого 2.** Зөв 2006 өнцөгт P-ийн диагонал-ийн төгсгөлийн цэгүүд нь P-ийн хилийг тус бүр нь сондгой тооны тал агуулах хоёр хэсэгт хувааж байвал түүнийг **сайн** гэе. P-ийн талуудыг мөн **сайн** гэе. Аль ч хоёр нь P-ийн дотор ерөнхий цэггүй байх 2003 диагоналиараа P гурвалжнуудад хуваагдсан байг. Ийм хуваалтад хоёр **сайн** талтай адил хажуут гурвалжин хамгийн олондоо хэд байж болох вэ?

**Бодлого 3.** Аливаа a, b, c бодит тоонуудын хувьд

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

тэнцэтгэл биш биелэх хамгийн бага бодит тоо M-г ол.

Бодох хугацаа: 4 цаг 30 минут
Бодлого бүр 7 оноо

12. juli 2006

**Oppgave 1.** La $ABC$ være en trekant med innsenter $I$. Et punkt $P$ ligger på innsiden av trekanten og tilfredsstiller

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Vis at $AP \geq AI$, og at likhet gjelder hvis og bare hvis $P = I$.

**Oppgave 2.** La $P$ være en regulær 2006-kant. En diagonal i $P$ kalles for *god* hvis endepunktene deler omkretsen til $P$ i to deler, hver av dem bestående av et odde antall kanter av $P$. Sidene i $P$ kalles også *gode*.

$P$ deles opp i trekanter av 2003 diagonaler, av hvilke ingen to har felles punkt innenfor $P$. Finn det maximale antallet likebente trekanter med to gode sider som kan oppnås ved en slik oppdeling.

**Oppgave 3.** Bestem det minste reelle tallet $M$ slik at ulikheten

$$\left| ab(a^2-b^2) + bc(b^2-c^2) + ca(c^2-a^2) \right| \leq M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

holder for alle reelle tall $a$, $b$ og $c$.

*Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter*
*Hver oppgave er verdt 7 poeng*

۱۲ جولای ۲۰۰۶

مساله ۱. فرض کنید I مرکز دایره محیطی مثلث ABC باشد. نقطه P را درون مثلث ABC طوری انتخاب می کنیم که

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB .$$

نشان دهید $AP \geq AI$ و تساوی برقرار می شود اگر و تنها اگر $P=I$ .

مساله ۲. فرض کنید P یک ۲۰۰۶- ضلعی منتظم باشد. قطری از P را **خوب** گوییم هر گاه نقاط انتهایی این قطر، اضلاع P را به دو قسمت تقسیم کند که هرقسمت تعداد فرد ضلع دارد. اضلاع P نیز قطر **خوب** به حساب می‌آیند. فرض کنید P را با ۲۰۰۳ قطر که هیچ دو تای آن ها درون P تقاطع ندارند به ناحیه های مثلث شکل تقسیم کرده ایم. بیشترین تعداد مثلث های متساوی الساقین با دو ضلع خوب را بیابید که می توانند در این ناحیه بندی ظاهر شوند.

مساله ۳. کمترین مقدارعدد حقیقی M را بیابید به طوری که نامساوی

$$\left| ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) \right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

برای هر a ، b و c حقیقی برقرار باشد.

زمان: چهار ساعت و نیم
هر مساله هفت امتیاز دارد

12 lipca 2006 r.

**Zadanie 1.**
Punkt $I$ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $ABC$. Punkt $P$ leży wewnątrz tego trójkąta, przy czym

$$\sphericalangle PBA + \sphericalangle PCA = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB.$$

Dowieść, że $AP \geqslant AI$ oraz że równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $P = I$.

**Zadanie 2.**
Niech $P$ będzie 2006-kątem foremnym. Przekątną wielokąta $P$ nazwiemy *dobrą*, jeśli jej końce dzielą brzeg tego wielokąta na dwie części, z których każda składa się z nieparzystej liczby boków wielokąta $P$. Każdy bok wielokąta $P$ również nazwiemy *dobrym*.
Załóżmy, że wielokąt $P$ podzielono na trójkąty przy pomocy 2003 przekątnych, z których żadne dwie nie przecinają się wewnątrz wielokąta $P$. Wyznaczyć największą liczbę trójkątów równoramiennych, które mogą pojawić się w takiej konfiguracji i które mają dwa dobre boki.

**Zadanie 3.**
Wyznaczyć najmniejszą liczbę rzeczywistą $M$ taką, że nierówność

$$\left| ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) \right| \leqslant M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

jest spełniona dla wszystkich liczb rzeczywistych $a$, $b$ oraz $c$.

*Czas na rozwiązywanie: 4 godziny 30 minut*
*Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów*

12 de Julho de 2006

**Problema 1.** Seja $ABC$ um triângulo com incentro $I$. Um ponto $P$ no interior do triângulo verifica

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Prove que $AP \geqslant AI$, com igualdade se, e somente se, $P = I$.

**Problema 2.** Uma diagonal de um polígono regular $P$ de 2006 lados é um *segmento bom* se separa $P$ em duas partes, cada uma tendo um número ímpar de lados de $P$. Os lados de $P$ também são *segmentos bons*.

Divide-se $P$ em triângulos, traçando-se 2003 diagonais tais que, duas a duas, não se cortam no interior de $P$. Determine o maior número de triângulos isósceles nos quais dois lados são segmentos bons que podem aparecer numa divisão como essa.

**Problema 3.** Determine o menor número real $M$ tal que a desigualdade

$$\left|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)\right| \leqslant M \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2$$

é verdadeira para todos os números reais $a$, $b$, $c$.

*Duração da prova: 4 horas e 30 minutos.*
*Cada problema vale 7 pontos.*

12 Iulie 2006

**Problema 1.** Fie $ABC$ un triunghi şi $I$ centrul cercului înscris în triunghi. Un punct $P$ situat în interiorul triunghiului satisface relaţia

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Arătaţi că $AP \geq AI$, cu egalitate dacă şi numai dacă $P = I$.

**Problema 2.** Fie $P$ un poligon regulat cu 2006 laturi. O diagonală a sa se numeşte *bună* dacă extremităţile ei divid perimetrul poligonului $P$ în două părţi, fiecare având un număr impar de laturi. Laturile poligonului $P$ sunt şi ele considerate ca fiind *bune*.

Presupunem că poligonul $P$ a fost partiţionat în triunghiuri prin 2003 diagonale, astfel încât oricare două dintre aceste diagonale nu se intersectează în interiorul poligonului $P$. Determinaţi valoarea maximă a numărului de triunghiuri isoscele cu două laturi *bune* care pot apărea într-o astfel de partiţie a poligonului $P$.

**Problema 3.** Determinaţi cel mai mic număr real $M$ pentru care inegalitatea

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

este adevărată oricare ar fi numerele reale $a$, $b$ şi $c$.

*Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute*
*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte*

12 июля 2006 года

**Задача 1.** Точка $I$ – центр вписанной окружности треугольника $ABC$. Внутри треугольника выбрана точка $P$ такая, что

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Докажите, что $AP \geq AI$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда $P$ совпадает с $I$.

**Задача 2.** Диагональ правильного 2006-угольника $P$ называется *хорошей*, если ее концы делят границу $P$ на две части, каждая из которых содержит нечетное число сторон. Стороны $P$ также называются *хорошими*.

Пусть $P$ разбивается на треугольники 2003 диагоналями, никакие две из которых не имеют общих точек внутри $P$. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников, каждый из которых имеет две хорошие стороны, может иметь такое разбиение?

**Задача 3.** Определите наименьшее действительное число $M$ такое, что неравенство

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

выполняется для любых действительных чисел $a, b, c$.

*Время работы: 4 часа 30 минут*
*Каждая задача оценивается в 7 баллов*

47th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
SLOVENIA 2006

day: **1**

language: **Singhalese**

12 ජූලි 2006

**ගැටළුව 1.** ABC ත්‍රිකෝණයේ අන්තඃ කේන්ද්‍රය $I$ ලෙස ගන්න. මෙම ත්‍රිකෝණයේ අභ්‍යන්තරයේ ඇති $P$ නම් ලක්ෂ්‍යය $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$ තෘප්තිමත් කරයි. $AP \geq AI$ බව පෙන්වා, සමානතාවය $P = I$ නම් හා නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.

**ගැටළුව 2.** $P$ සවිධි 2006 − අස්‍රයකි. $P$ හි විකර්ණයක අන්ත ලක්ෂ්‍යය එහි මායිම $P$ හි පාද ඔත්තේ සංඛ්‍යාවක් සහිත කොටස් දෙකකට බෙදයි නම් එම විකර්ණය හොඳ යැයි කියවේ. $P$ හි පාද හොඳ ලෙස සැලකේ.

$P$ එහි අභ්‍යන්තරයේ පොදු ලක්ෂ්‍ය නොමැති විකර්ණ 2003 කින් ත්‍රිකෝණ වලට විච්ඡේදනය වී ඇතැයි සිතන්න. එවැනි වින්‍යාසයක තිබිය හැකි හොඳ පාද දෙකක් සහිත සමද්විපාද ත්‍රිකෝණ උපරිම සංඛ්‍යාව සොයන්න.

**ගැටළුව 3.** $|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$ අසමානතාවය සියලු තාත්වික $a$, $b$ හා $c$ සඳහා තෘප්තිමත් කරන කුඩාම තාත්වික $M$ සංඛ්‍යාව නිර්ණය කරන්න.

කාලය: පැය 4 මිනිත්තු 30
ගැටළුවට ලකුණු 7ක් ලැබේ.

12. júl 2006

**Úloha 1.** Nech $I$ je stred kružnice vpísanej do trojuholníka $ABC$. Bod $P$ z vnútra trojuholníka spĺňa

$$|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|.$$

Dokážte, že $|AP| \geq |AI|$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $P = I$.

**Úloha 2.** Nech $P$ je pravidelný 2006-uholník. Jeho uhlopriečka sa nazýva *dobrá*, ak jej koncové body rozdeľujú hranicu mnohouholníka $P$ na dve časti, z ktorých každá pozostáva z nepárneho počtu strán. Strany mnohouholníka $P$ sa tiež považujú za *dobré*.

Predpokladajme, že $P$ je rozdelený na trojuholníky 2003 uhlopriečkami, z ktorých žiadne dve nemajú spoločný bod vo vnútri $P$. Nájdite maximálny možný počet rovnoramenných trojuholníkov, ktoré majú dve dobré strany.

**Úloha 3.** Určte najmenšie reálne číslo $M$ tak, aby nerovnosť

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

platila pre všetky reálne čísla $a$, $b$, $c$.

*Čas na vypracovanie: 4 hodiny 30 minút.*
*Za každú úlohu možno získať 7 bodov.*

12. julij 2006

**Naloga 1.** Naj bo $I$ središče včrtane krožnice trikotnika $ABC$. Za točko $P$ v notranjosti trikotnika velja

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Dokaži, da je $|AP| \geq |AI|$ in da enakost velja natanko takrat, ko je $P = I$.

**Naloga 2.** Za diagonalo pravilnega 2006-kotnika $P$ rečemo, da je *dobra*, če njeni krajišči razdelita rob $P$ na dva dela tako, da je v vsakem izmed njiju liho mnogo stranic večkotnika $P$. Za vse stranice večkotnika $P$ rečemo, da so *dobre*.

Denimo, da $P$ razdelimo z 2003 diagonalami na trikotnike tako, da se nobeni dve diagonali ne sekata v notranjosti $P$. Določi največje možno število enakokrakih trikotnikov z dvema dobrima stranicama, ki jih lahko dobimo pri takih razdelitvah večkotnika $P$.

**Naloga 3.** Določi najmanjše realno število $M$, za katerega velja neenakost

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

za vsa realna števila $a$, $b$ in $c$.

*Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.*
*Vsaka naloga je vredna 7 točk.*

12 de julio de 2006

**Problema 1.** Sea $ABC$ un triángulo y sea $I$ el centro de su circunferencia inscrita. Sea $P$ un punto en el interior del triángulo tal que

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Demuestre que $AP \geq AI$ y que vale la igualdad si y sólo si $P = I$.

**Problema 2.** Decimos que una diagonal de un polígono regular $P$ de 2006 lados es un *segmento bueno* si sus extremos dividen al borde de $P$ en dos partes, cada una de ellas formada por un número impar de lados. Los lados de $P$ también se consideran *segmentos buenos*.

Supongamos que $P$ se ha dividido en triángulos trazando 2003 diagonales de modo que ningún par de ellas se corta en el interior de $P$. Encuentre el máximo número de triángulos isósceles que puede haber tales que dos de sus lados son *segmentos buenos*.

**Problema 3.** Determine el menor número real $M$ tal que la desigualdad

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2$$

se cumple para todos los números reales $a$, $b$, $c$.

*Tiempo permitido: 4 horas 30 minutos*
*Cada problema vale 7 puntos.*

12 . јули 2006.

**Задатак 1.** Нека је $I$ средиште уписане кружнице троугла $ABC$. У унутрашњости троугла изабрана је тачка $P$ таква да је

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB .$$

Докажите да је $AP \geq AI$, при чему једнакост важи ако и само ако се тачка $P$ подудара са тачком $I$.

**Задатак 2.** За дијагоналу правилног 2006-тоугла $P$ кажемо да је *добра*, ако њени крајеви дијеле руб од $P$ на два дијела тако да је сваки од њих састављен од непарног броја страница од $P$. За странице полигона $P$ такође кажемо да су *добре*.

Посматрајмо разбијања полигона $P$ на троуглове помоћу 2003 дијагонале, такве да никоје двије међу њима немају заједничку тачку у унутрашњости полигона $P$. Одредите максималан број једнакокраких троуглова са двије добре странице, који се могу појавити при неком таквом разбијању.

**Задатак 3.** Одредите најмањи реалан број $M$ такав да неједнакост

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

важи за све реалне бројеве $a$, $b$ и $c$.

*Вријеме за рад: 4 часа и 30 минута*
*Сваки задатак вриједи 7 бодова*

12 . јули 2006.

**Задатак 1.** Нека је $I$ средиште уписане кружнице троугла $ABC$. У унутрашњости троугла изабрана је тачка $P$ таква да је

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB .$$

Докажите да је $AP \geq AI$ , при чему се једнакост достиже ако и само ако се $P$ поклапа са $I$ .

**Задатак 2.** За дијагоналу правилног 2006-тоугла $P$ кажемо да је *добра*, ако њени крајеви деле руб од $P$ на два дела тако да је сваки од њих састављен од непарног броја страница од $P$ . За странице полигона $P$ такође кажемо да су *добре.*

Посматрајмо разбијања полигона $P$ на троуглове помоћу 2003 дијагонале, такве да никоје две међу њима немају заједничку тачку у унутрашњости полигона $P$. Одредите максималан број једнакокраких троуглова са две добре странице, који се могу појавити при неком таквом разбијању.

**Задатак 3.** Одредите најмањи реалан број $M$ такав да неједнакост

$$\left| ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) \right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

важи за све реалне бројеве $a$, $b$ и $c$.

*Дозвољено време за рад: 4 часа и 30 минута*
*Сваки задатак се бодује са 7 поена*

Den 12 juli 2006

**Problem 1.** Låt $ABC$ vara en triangel och låt $I$ vara mittpunkten för den i triangeln inskrivna cirkeln. För en punkt $P$ inuti triangeln gäller att

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Visa att $AP \geq AI$, samt att likheten gäller om och endast om $P = I$.

**Problem 2.** Låt $P$ vara en regelbunden 2006-hörning. En diagonal i $P$ kallas för *trevlig* om dess ändpunkter delar $P$:s omkrets i två delar, var och en med ett udda antal sidor från $P$. Månghörningens sidor anses också vara *trevliga*.

Antag att 2003 diagonaler, som parvist inte skär varandra inuti $P$, delar $P$ i trianglar. Bestäm det största antalet likbenta trianglar med två trevliga sidor som en sådan konfiguration kan ha.

**Problem 3.** Bestäm det minsta reela talet $M$ för vilket olikheten

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

gäller för alla reella tal $a$, $b$ och $c$.

*Tillåten tid: 4 timmar 30 minuter*
*För varje uppgift kan man få upp till 7 poäng*

**วันที่ ๑๒ กรกฎาคม ๒๕๔๙**

**โจทย์ข้อที่ ๑** ให้ $ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $I$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบใน จุด $P$ เป็นจุดภายในรูปสามเหลี่ยมที่สอดคล้อง

$$\angle PBA + \angle PCA \; = \; \angle PBC + \angle PCB\,.$$

จงแสดงว่า $AP \geq AI$ และอสมการเป็นสมการก็ต่อเมื่อ $P = I$

**โจทย์ข้อที่ ๒** ให้ $P$ เป็นรูป 2006 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า จะเรียกเส้นทแยงมุมของ $P$ ว่า *ด้านดี* เมื่อจุดปลายทั้งสองของเส้นทแยงมุมแบ่งเส้นรอบรูปของ $P$ ออกเป็นสองส่วน ซึ่งแต่ละส่วนประกอบด้วยด้านจำนวนคี่ด้าน นอกจากนี้ ให้ถือว่าด้านแต่ละด้านของ $P$ เป็น *ด้านดี* เช่นกัน

จงหาจำนวนที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี *ด้านดี* สองด้าน ซึ่งเกิดขึ้นจากการซอยแบ่ง $P$ เป็นรูปสามเหลี่ยมย่อยด้วยเส้นทแยงมุม 2003 เส้น โดยไม่มีเส้นทแยงมุมสองเส้นใดตัดกันภายใน $P$

**โจทย์ข้อที่ ๓** จงหาจำนวนจริง $M$ ค่าน้อยสุดที่ทำให้อสมการ

$$\left|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)\right| \;\leq\; M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริง $a$, $b$ และ $c$

*เวลาที่ให้: ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที*

*โจทย์แต่ละข้อมี ๗ คะแนน*

12 Temmuz 2006

**Problem 1.** İçteğet çemberinin merkezi $I$ olan bir $ABC$ üçgeninin içinde,

$$m(P\hat{B}A) + m(P\hat{C}A) = m(P\hat{B}C) + m(P\hat{C}B)$$

olacak şekilde bir P noktası seçiliyor. $|AP| \geq |AI|$ olduğunu ve eşitliğin ancak ve ancak $P = I$ olması halinde sağlanacağını gösteriniz.

**Problem 2.** Bir $P$ düzgün 2006-geni veriliyor. $P$ nin bir köşegenine, uçları $P$ nin çevresini, her birisi $P$ nin tek sayıda kenarından oluşan iki parçaya ayırması halinde, *güzel* adı veriliyor. $P$ nin her kenarı da *güzel* kabul ediliyor.

$P$, herhangi ikisi çokgen içinde kesişmeyen 2003 köşegeni tarafından üçgensel bölgelere ayrıldığında, iki kenarı *güzel* olan en fazla kaç ikizkenar üçgen oluşabileceğini bulunuz.

**Problem 3.** Tüm $a$, $b$, $c$ reel sayıları için

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

eşitsizliğini geçerli kılan en küçük $M$ reel sayısını bulunuz.

*Süre 4,5 saattir.*
*Her problem 7 puandır.*

12 липня 2006 року

**Задача 1.** Точка $I$ – центр вписаного кола трикутника $ABC$. Усередині трикутника вибрано точку $P$ таку, що

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Доведіть, що $AP \geq AI$, причому рівність досягається тоді й тільки тоді, коли точка $P$ співпадає з $I$.

**Задача 2.** Діагональ правильного 2006-кутника $P$ називається доброю, якщо її кінці поділяють межу $P$ на дві частини, кожна з яких містить непарне число сторін. Сторони $P$ також називаються добрими.

Нехай $P$ розбивається на трикутники 2003 діагоналями, жодні дві з яких не мають спільних точок усередині $P$.

Яку найбільшу кількість рівнобедрених трикутників, кожний з яких має дві добрі сторони, може містити таке розбиття?

**Задача 3.** Визначте найменше дійсне число $M$ таке, що нерівність

$$\left| ab(a^2-b^2) + bc(b^2-c^2) + ca(c^2-a^2) \right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

виконується для будь-яких дійсних чисел $a, b, c$.

Час виконання роботи: 4 години 30 хвилин.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

12 iyul 2006 yil

**1-masala.** $I$ nuqta $ABC$ uchburchakka ichki chizilgan aylananing markazi bo'lsin. Uchburchakning ichida

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

tenglikni qanoatlantiradigan $P$ nuqta tanlangan.
Quyidagilarni isbotlang:

- $AP \geq AI$
- Tenglik bajarilishi uchun $P = I$ bo'lishi zarur va yetarli.

**2-masala.** $P$ - muntazam 2006-burchak bo'lsin. $P$ ning diagonali *yahshi* deyiladi, agar bu diagonalning uchlari $P$ ning chegarasini har biri soni toq bo'lgan tomonlardan tashkil topgan ikkita qismga ajratsa. $P$ ning tomonlarini ham *yahshi* deb hisoblaymiz.

$P$ ko'pburchak 2003 ta diagonallar yordamida uchburchaklarga shunday bo'linganki, bu diagonallardan ihtiyoriy ikkitasi berilgan ko'burchakning ichiga tegishli umumiy nuqtaga ega bo'lmasin. Bunday bo'linishda ikkita tomoni *yahshi* bo'lgan teng yonli uchburchaqlar sonining eng katta qiymatini toping.

**3-masala.** Shunday eng kichik bo'lgan $M$ haqiqiy son topilsinki,

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

tengsizlik barcha haqiqiy $a$, $b$ va $c$ sonlar uchun o'rinli bo'lsin.

*Ajratilgan vaqt* : *4 soat 30 minut*
*Har bir masala 7 ball bilan baholanadi*

Ngày 12 Tháng 7 Năm 2006

**Bài 1.** Cho $ABC$ là một tam giác với tâm đường tròn nội tiếp là $I$. $P$ là một điểm ở trong tam giác thỏa mãn

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Chứng minh rằng $AP \geq AI$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $P = I$.

**Bài 2.** Cho $P$ là một đa giác đều 2006 cạnh. Một đường chéo của $P$ được gọi là *đoạn tốt* nếu các đỉnh đầu và đỉnh cuối của nó chia chu vi của $P$ thành hai phần, phần nào cũng có số lẻ cạnh. Các cạnh của $P$ cũng được coi là đoạn tốt.

Giả sử ta chia $P$ thành các tam giác bởi 2003 đường chéo đôi một không có điểm chung thuộc miền trong của $P$. Hãy tính số lớn nhất các tam giác cân có hai cạnh là đoạn tốt có thể xuất hiện trong cách chia $P$ như trên.

**Bài 3.** Xác định số thực nhỏ nhất $M$ sao cho bất đẳng thức

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

được thỏa mãn cho tất cả các số thực $a$, $b$ và $c$.

*Thời gian làm bài: 4 giờ 30 phút*
*Mỗi bài được 7 điểm*