12. juuli 2006

Ülesanne 1. Olgu ABC kolmnurk ja I tema siseringjoone keskpunkt. Punkt P selle kolmnurga sees rahuldab tingimust

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Näita, et $|AP| \geqslant |AI|$, kus võrdus kehtib parajasti siis, kui $P = I$.

Ülesanne 2. Olgu P korrapärane 2006-nurk. P diagonaali nimetame "heaks", kui tema otspunktid jaotavad P rajajoone kaheks osaks, mis kumbki koosneb paaritust arvust P külgedest. P külgi nimetame samuti "headeks".

Vaatleme P jaotusi kolmnurkadeks 2003 sellise diagonaaliga, millest ühelgi kahel ei ole P sees ühist punkti. Leia suurim kahe "hea" küljega võrdhaarsete kolmnurkade arv, mis saab sellises jaotuses esineda.

Ülesanne 3. Leia vähim selline reaalarv M, et võrratus

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leqslant M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

kehtib kõigi reaalarvude a, b ja c korral.

Aega on 4 tundi 30 minutit.
Iga ülesanne maksab 7 punkti.