12 juillet 2006

Problème 1. Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Un point P intérieur au triangle vérifie

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Montrer que $AP \geq AI$ et que l'égalité a lieu si et seulement si $P = I$.

Problème 2. Soit P un polygone régulier à 2006 côtés. Une diagonale de P est appelée *bonne* si ses extrémités partagent le contour de P en deux parties ayant chacune un nombre impair de côtés de P. Les côtés de P sont aussi appelés *bons*.

On suppose que P a été subdivisé en triangles par 2003 diagonales n'ayant deux à deux aucun point commun à l'intérieur de P. Trouver le nombre maximum de triangles isocèles ayant deux côtés bons qui peuvent apparaître dans une telle subdivision.

Problème 3. Trouver le plus petit réel M tel que l'inégalité

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

soit vérifiée pour tous nombres réels a, b et c.

Temps accordé: 4 heures et demie
Chaque problème vaut 7 points