12 Ιουλίου 2006

Πρόβλημα 1. Δίνεται τρίγωνο ABC με κέντρο εγγεγραμμένου κύκλου το σημείο I. Ένα σημείο P στο εσωτερικό του τριγώνου ικανοποιεί την ισότητα

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB .$$

Να αποδειχθεί ότι $AP \geq AI$, και ότι η ισότητα ισχύει τότε και μόνο τότε αν $P = I$.

Πρόβλημα 2. Έστω P ένα κανονικό 2006-γωνο. Μια διαγώνιος του P καλείται *καλή* αν τα άκρα της διαιρούν το σύνορο του P σε δυο μέρη, το καθένα από τα οποία αποτελείται από περιττό αριθμό πλευρών του P. Οι πλευρές του P επίσης καλούνται *καλές*.

Υποθέτουμε ότι το P έχει διαμερισθεί σε τρίγωνα από 2003 διαγώνιες, οποιεσδήποτε δυο από τις οποίες δεν έχουν κοινό σημείο στο εσωτερικό του P. Να βρεθεί ο μέγιστος αριθμός των ισοσκελών τριγώνων με δυο καλές πλευρές που μπορούν να εμφανισθούν σε μια τέτοια διαμέριση.

Πρόβλημα 3. Να υπολογισθεί ο ελάχιστος πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε η ανισότητα

$$\left| ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) \right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

να ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς a, b και c.

Διάρκεια εξέτασης: 4 ώρες και 30 λεπτά
Μέγιστη βαθμολογία κάθε προβλήματος: 7 μονάδες