12. srpnja 2006.

Zadatak 1. Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC. U unutrašnjosti trokuta ABC dana je točka P takva da je

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Dokažite da je $|AP| \geq |AI|$, te da jednakost vrijedi ako i samo ako se točka P podudara sa točkom I.

Zadatak 2. Neka je P pravilni poligon sa 2006 stranica. Za dijagonalu poligona P kažemo da je *dobra* ako njezine krajnje točke dijele rub od P na dva dijela, tako da se svaki od njih sastoji od neparnog broja stranica poligona P. Za stranice poligona P također kažemo da su *dobre*.

Promatrajmo podjele poligona P na trokute pomoću 2003 dijagonale, tako da nikoje dvije među tim dijagonalama nemaju zajedničku točku u unutrašnjosti poligona P. Nađite maksimalni broj jednakokračnih trokuta s dvije dobre stranice, koji se mogu dobiti pri nekoj takvoj podjeli.

Zadatak 3. Odredite najmanji realni broj M takav da nejednakost

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

vrijedi za sve realne brojeve a, b i c.

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova