2006. július 12.

1. Feladat Az ABC háromszög beírt körének középpontja legyen I. A háromszög P belső pontja kielégíti a

$$PBA\sphericalangle + PCA\sphericalangle = PBC\sphericalangle + PCB\sphericalangle$$

egyenlőséget. Bizonyítsuk be, hogy $AP \geqslant AI$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $P = I$.

2. Feladat Legyen P egy szabályos 2006-szög. P egy átlóját *jó*nak nevezzük, ha a végpontjai P határát két olyan részre bontják, amelyek mindegyike P páratlan sok oldalát tartalmazza. Az oldalakat szintén *jó*nak nevezzük.

Tegyük fel, hogy P-t háromszögekre bontottuk 2003 olyan átlóval, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös pontja P belsejében. Határozzuk meg az ilyen felbontásokban előforduló egyenlőszárú, két jó oldallal rendelkező háromszögek számának maximumát.

3. Feladat Határozzuk meg a legkisebb olyan M valós számot, amire az

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leqslant M\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2$$

egyenlőtlenség teljesül minden a, b, c valós számra.

Munkaidő: 4 és fél óra.
Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.