12 de Julho de 2006

Problema 1. Seja ABC um triângulo com incentro I. Um ponto P no interior do triângulo verifica

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Prove que $AP \geqslant AI$, com igualdade se, e somente se, $P = I$.

Problema 2. Uma diagonal de um polígono regular P de 2006 lados é um *segmento bom* se separa P em duas partes, cada uma tendo um número ímpar de lados de P. Os lados de P também são *segmentos bons*.

Divide-se P em triângulos, traçando-se 2003 diagonais tais que, duas a duas, não se cortam no interior de P. Determine o maior número de triângulos isósceles nos quais dois lados são segmentos bons que podem aparecer numa divisão como essa.

Problema 3. Determine o menor número real M tal que a desigualdade

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leqslant M \left(a^2 + b^2 + c^2 \right)^2$$

é verdadeira para todos os números reais a, b, c.

Duração da prova: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 7 pontos.