12 июля 2006 года

Задача 1. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Внутри треугольника выбрана точка P такая, что

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Докажите, что $AP \geq AI$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда P совпадает с I.

Задача 2. Диагональ правильного 2006-угольника P называется *хорошей*, если ее концы делят границу P на две части, каждая из которых содержит нечетное число сторон. Стороны P также называются *хорошими*.

Пусть P разбивается на треугольники 2003 диагоналями, никакие две из которых не имеют общих точек внутри P. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников, каждый из которых имеет две хорошие стороны, может иметь такое разбиение?

Задача 3. Определите наименьшее действительное число M такое, что неравенство

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

выполняется для любых действительных чисел a, b, c.

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов