13 Julie 2006

Probleem 4. Bepaal alle pare heeltalle (x, y) sodat

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Probleem 5. Gegee 'n polinoom P van graad n met heeltallige koëffisiënte, waar $n > 1$, en 'n positiewe heeltal k. Beskou die polinoom $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, waar P k keer voorkom. Bewys dat daar hoogstens n heeltalle t bestaan sodat $Q(t) = t$.

Probleem 6. Gegee 'n konvekse veelhoek P. Aan elke sy b van P word die grootste area van 'n driehoek toegeken wat in P lê en waarvan b 'n sy is. Bewys dat die som van die areas aan die sye toegeken, minstens twee keer so groot as die area van P is.

Toegelate tyd: 4 uur 30 minute
Elke probleem tel 7 punte

13 Korrik 2006

Problem 4. Gjeni të gjitha çiftet e numrave të plotë (x, y) të tillë që

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problem 5. Le të jetë $P(x)$ një polinom i fuqisë $n > 1$ me koeficientë numra të plotë dhe le të jetë k një numër i plotë pozitiv . Marrim polinomin $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, ku P shfaqet k herë. Provoni që ka të shumtën n numra të plotë t të tillë që $Q(t) = t$.

Problem 6. Çdo brinje b të një shumëkëndëshi konveks P i shoqërojmë sipërfaqen më të madhe të një trekëndëshi i cili përmbahet në P dhe ka b si brinjë. Tregoni që shuma e sipërfaqeve që i shoqërohen brinjëve të P është të paktët sa dyfishi i sipërfaqes së P.

Koha e lejuar: 4 orë e 30 minuta
Çdo problem vlerësohet me 7 pikë

13 July 2006

السؤال الرابع :

حدد جميع الأزواج المرتبه (x,y) حيث x , y أعداد صحيحه , تحقق المعادله

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2$$

السؤال الخامس :

لتكن $P(x)$ كثيرة حدود من الدرجه n حيث $n>1$ ومعاملاتها أعداد صحيحه , وليكن k عدد صحيح موجب . أعتبر كثيرة الحدود

$Q(x)=P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, حيث P تكررت k مره .

برهن أنه يوجد على الاكثر n من الأعداد الصحيحه t التي تثبتها كثيرة الحدود $Q(x)$, اي أن $Q(t)=t$.

السؤال السادس :

عين لكل ضلع b في المضلع المحدب P المساحة القصوى لمثلث في المضلع P يكون الضلع b احد اضلاعه .
برهن أن مجموع المساحات المعينه لجميع اضلاع المضلع تساوي على الأقل (لا تقل عن) ضعف مساحة المضلع P .

الوقت المتاح للأجابة : أربع ساعات و نصف الساعة .
لكل مسأله 7 درجات فقط .

13-ը հուլիսի 2006 թ.

Խնդիր 4: Գտնել բոլոր (x, y) ամբողջ թվերի զույգերը, որոնք բավարարում են

$$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2}$$

հավասարմանը:

Խնդիր 5: Դիցուք $P(x)$-ը $n(n>1)$ աստիճանի ամբողջ գործակիցներով բազմանդամ է, իսկ k-ն կամայական դրական ամբողջ թիվ է: Դիտարկենք

$$Q(x)=P(P(\dots P(P(x))\dots))$$

բազմանդամը: [Այստեղ P-ն կիրառված է k անգամ:] Ապացուցել, որ գոյություն ունեն n-ից ոչ ավելի t ամբողջ թվեր այնպիսիք, որ $Q(t)=t$:

Խնդիր 6: P ուռուցիկ բազմանկյան յուրաքանչյուր b կողմին համապատասխանության մեջ է դրվում ամենամեծը: Այդ եռանկյունների մակերեսներից եռանկյունները գտնվում են P-ի ներսում և նրանց կողմերից մեկը համընկնում է b-ի հետ: Ապացուցել, որ մակերեսների գումարը, որոնք համապատասխանեցված են P-ի բոլոր կողմերին, փոքր չէ P բազմանկյան մակերեսի կրկնապատիկից:

Աշխատանքի տևողությունը՝ 4 ժ. 30 րոպե:
Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է 7 միավոր:

الخميس 13 يوليوز 2006

Language : Moroccan Arabic

التمرين 4 :

حدد جميع الأزواج $(x\ ,\ y)$ من الأعداد الصحيحة النسبية بحيث :

$$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2} \quad .$$

التمرين 5 :

$P(x)$ حدودية درجتها n $(n>1)$ و معاملاتها أعداد صحيحة نسبية و k عدد صحيح طبيعي غير منعدم .
نعتبر الحدودية $Q(x)=P(P(........P(P(x))........))$ التي يظهر فيها P، k مرة .
بين أنه يوجد على الأكثر n عددا صحيحا نسبيا t بحيث $Q(t)=t$.

التمرين 6 :

نعتبر مضلعا محدبا P و نربط كل ضلع b من هذا المضلع بالمساحة القصوية لمثلث موجود داخل P و أحد أضلاعه هو b . بين أن مجموع المساحات المرتبطة بجميع أضلاع المضلع P أكبر أو يساوي ضعف (double) مساحة المضلع P .

مدة الإنجاز : 4 ساعات و نصف
تمنح 7 نقط عن كل تمرين

الخميس 13 يوليو 2006

السؤال الرابع :

حدد كل الازواج المرتبة (س , ص) حيث س , ص تنتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة والتى تحقق :

$$1 + 2^{س} + 2^{2س+1} = ص^{2}$$

السؤال الخامس :

لتكن م حدودية من الدرجة ن > 1 و معاملاتها اعدادا صحيحة وليكن ع اي عدد صحيح موجب . اعتبر الحدودية :

ق (س) = م (م (..........م (م (س))............)) حيث م يحدث ع من المرات.

برهن انه يوجد على الاكثر ن من الاعداد الصحيحة ل حيث

ق (ل) = ل

السؤال السادس :

لكل ضلع ن في المضلع م نحدد اكبر مساحة للمثلث وطول ضلع من اضلاعه ن أيضا يتواجد داخل المضلع م . برهن أن مجموع المساحات المحددة باضلاع المضلع م تساوى على الاقل ضعف مساحة المضلع م.

الزمن : 4 ساعات و نصف 7 درجات لكل سؤال

13 iyul 2006-ci il

Məsələ 4. Aşağıdakı tənliyi ödəyən bütün tam *(x,y)* cütlərini tapın:

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2 .$$

Məsələ 5. *P(x)* dərəcəsi *n>1* olan tam əmsallı çoxhədli və *k* istənilən müsbət tam ədəddir. *Q(x)=P(P(...P(P(x))...))* çoxhədlisinə baxaq, burada *P* *k* dəfə təkrarlanir . Isbat edin ki, *Q(t) = t* bərabərliyini ödəyən ən çoxu *n* sayda tam *t* ədədi var.

Məsələ 6. Verilmiş qabariq çoxbucaqlının hər bir *c* tərəfinə bu çoxbucaqlının daxilində yerləşən və tərəflərindən biri *c* ilə üst-üstə duşən ən böyük sahəli üçbucağın sahəsi qarşı qoyulur. Isbat edin ki, bütün tərəflərə uyğun sahələrin cəmi çoxbucaqlının sahəsinin iki mislindən kiçik deyil.

Ayrılmış vaxt: 4,5 saat
Hər məsələ 7 balla qiymətləndirilir

13. juli 2006.

Zadatak 4. Naći sve parove (x, y) cijelih brojeva takvih da vrijedi

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2.$$

Zadatak 5. Neka je $P(x)$ polinom stepena n $(n>1)$ sa cjelobrojnim koeficijentima i neka je k prirodan broj. Posmatrajmo polinom

$$Q(x)=P(P(\ldots P(P(x))\ldots)),$$

pri čemu se P pojavljuje k puta. Dokazati da postoji najviše n cijelih brojeva t takvih da je $Q(t)=t$.

Zadatak 6. Svakoj stranici b konveksnog poligona P pridružena je maksimalna površina trougla kojem je b jedna od stranica i koji je sadržan u poligonu P. Dokazati da je zbir svih površina pridruženih stranicama poligona P veći ili jednak od dvostruke površine poligona P.

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

13 Юли 2006

Задача 4. Да се намерят всички двойки (x, y) от цели числа, за които

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Задача 5. Нека $P(x)$ е полином от степен $n > 1$ с цели коефициенти и нека k е естествено число. Разглеждаме полинома $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, където P се появява k пъти. Да се докаже, че съществуват най-много n цели числа t, за които $Q(t) = t$.

Задача 6. На всяка страна b на изпъкнал многоъгълник P е съпоставено максималното лице на триъгълник със страна b, който се съдържа в P. Да се докаже, че сборът на лицата, съпоставени на страните на P е поне два пъти по-голям от лицето на P.

Време за работа: 4 часа 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

2006年7月13日

四、求所有的整数对(x, y)，使得

$$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2}.$$

五、设$P(x)$为n次（$n>1$）整系数多项式，k是一个正整数. 考虑多项式 $Q(x)=P(P(\cdots P(P(x))\cdots))$，其中$P$出现$k$次. 证明：最多存在$n$个整数$t$，使得$Q(t)=t$.

六、对于凸多边形P的任意边b，以b为边，在P内部作一个面积最大的三角形. 证明: 对P的每条边，按上述方法所得三角形的面积之和至少是P的面积的2倍.

时间：4小时30分钟
每题7分

2006 年 7 月 13 日

Problem 4. 試確定所有的整數對 (x, y), 使得

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problem 5. 令 $P(x)$ 爲 n 次 $(n > 1)$ 整係數多項式, 且令 k 爲一正整數。考慮多項式 $Q(x) = P(P(\cdots P(P(x))\cdots))$, 其中 P 出現 k 次。試證: 至多存在 n 個整數 t, 使得 $Q(t) = t$.

Problem 6. 對於凸多邊形 P 的任意邊 b, 以 b 爲一邊, 在 P 內部作一個面積最大的三角形。試證: 對 P 的每一邊, 按上述方法所得的三角形面積總和至少是 P 的面積的 2 倍。

考試時間:*4* 小時 *30* 分
每題 *7* 分

13. červenec 2006

Úloha 4. Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, pro něž platí

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Úloha 5. Nechť $P(x)$ je polynom stupně $n > 1$ s celočíselnými koeficienty a k nechť je kladné celé číslo. Uvažujme polynom $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, kde P je uvažováno k-krát. Dokažte, že existuje nejvýše n celých čísel t takových, že $Q(t) = t$.

Úloha 6. Každé straně b konvexního mnohoúhelníku P přiřadíme maximální obsah trojúhelníku, který celý leží v P a jehož jedna strana je b. Dokažte, že součet obsahů přiřazených všem stranám mnohoúhelníku P je větší nebo roven než dvojnásobek obsahu mnohoúhelníku P.

Čas na vypracování: 4 hodiny 30 minut.
Za každou úlohu je možno získat 7 bodů.

13. juli 2006

Opgave 4. Bestem alle par af heltal (x, y) sådan at:

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

Opgave 5. Lad $P(x)$ være et polynomium af grad $n > 1$ med heltallige koefficienter. Lad k være et positivt heltal. Betrakt polynomiummet $Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots))$, hvor P optræder k gange. Bevis at der eksisterer højst n forskellige heltal t sådan at $Q(t) = t$.

Opgave 6. Tildel til hver kant b i et konvekst polygon P det maximale areal af en trekant liggende inde i P og med b som en kant. Vis at summen af de tildelte arealer er mindst to gange arealet af P.

Tilladt tid: 4 timer og 30 minutter
Hver opgave er 7 point værd

13. Juli 2006

Aufgabe 4. Man bestimme alle Paare (x, y) ganzer Zahlen, welche die folgende Gleichung erfüllen:

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

Aufgabe 5. Es sei $P(x)$ ein Polynom vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten und $n > 1$. Ferner sei k eine positive ganze Zahl. Wir betrachten das Polynom

$$Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots)),$$

wobei P genau k-mal auftritt.
Man beweise, dass höchstens n ganze Zahlen t mit $Q(t) = t$ existieren.

Aufgabe 6. Gegeben sei ein konvexes Polygon P. Jeder Seite b von P wird das Maximum der Flächeninhalte jener Dreiecke zugeordnet, die in P liegen und die Seite b als eine ihrer Seiten haben.
Man beweise, dass die Summe der Flächeninhalte, die den Seiten von P zugeordnet wurden, mindestens doppelt so groß wie der Flächeninhalt von P ist.

Arbeitszeit: 4 $\frac{1}{2}$ Stunden
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

13 juli 2006

Opgave 4. Bepaal alle paren gehele getallen (x, y) zodanig dat

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Opgave 5. Zij $P(x)$ een polynoom (veelterm) van graad $n > 1$ met gehele coëfficiënten en zij k een positief geheel getal $(k > 0)$. Beschouw het polynoom

$$Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots)),$$

waarin P precies k keer voorkomt.
Bewijs dat er ten hoogste n gehele getallen t zijn zodanig dat $Q(t) = t$.

Opgave 6. Zij P een convexe veelhoek. Aan elke zijde b van P wordt de maximale oppervlakte toegekend van een driehoek die b als een zijde heeft en bevat is in P.
Bewijs dat de som van alle oppervlaktes die zijn toegekend aan de zijden van P ten minste tweemaal zo groot is als de oppervlakte van P.

Beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur
Voor iedere opgave maximaal 7 punten

13 July 2006

Problem 4. Determine all pairs (x, y) of integers such that

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problem 5. Let $P(x)$ be a polynomial of degree $n > 1$ with integer coefficients and let k be a positive integer. Consider the polynomial $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, where P occurs k times. Prove that there are at most n integers t such that $Q(t) = t$.

Problem 6. Assign to each side b of a convex polygon P the maximum area of a triangle that has b as a side and is contained in P. Show that the sum of the areas assigned to the sides of P is at least twice the area of P.

Time allowed: 4 hours 30 minutes
Each problem is worth 7 points

13. juuli 2006

Ülesanne 4. Leia kõik sellised täisarvupaarid (x, y), et

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Ülesanne 5. Olgu $P(x)$ täisarvuliste kordajatega polünoom astmega $n > 1$ ja olgu k positiivne täisarv. Vaatleme polünoomi $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, kus P esineb k korda. Tõesta, et leidub ülimalt n sellist täisarvu t, et $Q(t) = t$.

Ülesanne 6. Kumera hulknurga P igale küljele b seame vastavusse suurima pindala, mida omab mõni hulknurgas P sisalduv kolmnurk, mille üks külg on b. Näita, et P külgedele vastavusse seatud pindalade summa on vähemalt kaks korda suurem P pindalast.

Aega on 4 tundi 30 minutit.
Iga ülesanne maksab 7 punkti.

13. heinäkuuta 2006

Tehtävä 4. Määritä kaikki kokonaislukuparit (x, y), jotka toteuttavat yhtälön

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Tehtävä 5. Kokonaislukukertoimisen polynomin P aste on n, $n > 1$. Olkoon k mielivaltainen positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan polynomia

$$Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots)),$$

missä P esiintyy k kertaa. Todista, että on olemassa enintään n kokonaislukua t, joille pätee $Q(t) = t$.

Tehtävä 6. Liitetään jokaiseen kuperan monikulmion P sivuun b suurimman sellaisen kolmion ala, joka on kokonaan P:n sisällä ja jonka yksi sivu on b. Osoita, että kaikkiin P:n sivuihin liitettyjen alojen summa on ainakin kaksi kertaa P:n ala.

Työaikaa 4 tuntia 30 minuuttia.
Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 7.

13 juillet 2006

Problème 4. Trouver tous les couples (x, y) d'entiers vérifiant

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problème 5. Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients entiers, de degré $n > 1$ et k un entier strictement positif. On considère le polynôme $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, dans lequel P apparaît k fois. Montrer qu'il existe au plus n entiers t tels que $Q(t) = t$.

Problème 6. A tout côté b d'un polygone convexe P on associe le maximum de l'aire d'un triangle contenu dans P et ayant b comme côté. Montrer que la somme des aires associées à tous les côtés de P est au moins le double de l'aire de P.

Temps accordé: 4 heures et demie
Chaque problème vaut 7 points

47th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD SLOVENIA 2006

day: **2**

language: **Georgian**

13 ივლისი 2006 წელი

ამოცანა 4. იპოვეთ (x, y) მთელ რიცხვთა ყველა წყვილი, რომლისთვისაც

$$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2}.$$

ამოცანა 5. ვთქვათ $P(x)$ არის $n>1$ ხარისხის მრავალწევრი მთელი კოეფიციენტებით, ხოლო k – ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი. განვიხილოთ მრავალწევრი

$$Q(x)=P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$$

აქ P გამეორებულია k-ჯერ. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს არაუმეტეს n რაოდენობის ისეთი მთელი t რიცხვებისა, რომლებისათვისაც $Q(t)=t$.

ამოცანა 6. ამოზნექილი P მრავალკუთხედის ყოველ b გვერდს შევუსაბამოთ უდიდესი იმ სამკუთხედის ფართის, რომელსაც აქვს სამკუთხედებს მოთავსებულთ P-ს შიგნით და რომლის ერთი გვერდი ემთხვევა b-ს.

დაამტკიცეთ, რომ ფართების ჯამი, რომელიც შეესაბამება P-ს ყველა გვერდს არ არის ნაკლები P-ს გაორკეცებულ ფართზე.

მუშაობის დრო 4სთ. და 30 წთ.

თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით

13 Ιουλίου 2006

Πρόβλημα 4. Να βρεθούν όλα τα ζεύγη ακεραίων αριθμών *(x,y)* τέτοιων ώστε

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2 .$$

Πρόβλημα 5. Έστω *P(x)* ενα πολυωνυμο βαθμού *n>1* με ακέραιους συντελεστές και έστω *k* ένας θετικός ακέραιος. Θεωρούμε το πολυώνυμο *Q(x)=P(P(...P(P(x))...))*, όπου το *P* εμφανίζεται *k* φορές. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν το πολύ *n* ακέραιοι *t* τέτοιοι ώστε *Q(t) = t*.

Πρόβλημα 6. Αντιστοιχούμε σε κάθε πλευρά *b* ενός κυρτού πολύγωνου *P* το μέγιστο εμβαδόν ενός τρίγωνου το οποίο περιέχεται στο *P* και έχει την *b* ως μια πλευρά του. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των εμβαδών που αντιστοιχούν στις πλευρές του *P* είναι τουλάχιστον διπλάσιο του εμβαδού του *P*.

Διάρκεια εξέτασης: 4 ώρες και 30 λεπτά
Μέγιστη βαθμολογία κάθε προβλήματος: 7 μονάδες

13 ביולי 2006

שאלה מספר 4.

מצא את כל הזוגות (x,y) של מספרים שלמים כך ש

$$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2}$$

שאלה מספר 5.

יהי $P(x)$ פולינום בעל דרגה $n>1$ ובעל מקדמים שלמים, ויהי k מספר שלם חיובי. נתבונן בפולינום $Q(x)=P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, כאשר P מופיע k פעמים. הוכח כי קיימים לכל היותר n מספרים שלמים t כך ש $Q(t)=t$.

שאלה מספר 6.

לכל צלע b של פוליגון קמור P נשייך את השטח הגדול ביותר של משולש אשר צלע אחת שלו היא b וכולו מוכל ב- P. הוכח כי הסכום של השטחים המשוייכים לצלעות של P שווה לפחות פעמיים השטח של P.

הזמן המוקצה: ארבע שעות ו 30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות

13. srpnja 2006.

Zadatak 4. Nađite sve parove $(x,\ y)$ cijelih brojeva takvih da vrijedi

$$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2}.$$

Zadatak 5. Neka je $P(x)$ polinom stupnja n, $n>1$, sa cjelobrojnim koeficijentima i neka je k prirodan broj. Promatrajmo polinom

$$Q(x)=P\Big(P\big(\ldots P\big(P(x)\big)\ldots\big)\Big),$$

pri čemu se P pojavljuje k puta. Dokažite da postoji najviše n cijelih brojeva t takvih da je $Q(t)=t$.

Zadatak 6. Svakoj stranici b konveksnog poligona P pridružena je maksimalna površina trokuta kojemu je b jedna od stranica i koji je sadržan u poligonu P. Dokažite da je zbroj svih površina pridruženih stranicama poligona P veći ili jednak od dvostruke površine poligona P.

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

2006. július 13.

4. Feladat Határozzuk meg az összes olyan, egész számokból álló (x, y) számpárt, amire teljesül

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

5. Feladat Legyen $P(x)$ egy egész együtthatós, $n > 1$ fokú polinom, és legyen k egy pozitív egész. Tekintsük a $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$ polinomot, ahol P k-szor fordul elő. Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb n darab olyan t egész szám van, amire $Q(t) = t$.

6. Feladat Egy P konvex sokszög mindegyik b oldalához hozzárendeljük a legnagyobb területű olyan háromszög területét, aminek egyik oldala b és ami benne van P-ben. Bizonyítsuk be, hogy a P oldalaihoz rendelt területek összege legalább a kétszerese P területének.

Munkaidő: 4 és fél óra.
Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.

13. júlí 2006

Dæmi 4. Ákvarðið öll pör (x, y) af heiltölum þannig að

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Dæmi 5. Látum $P(x)$ vera margliðu með heiltölustuðla af stigi $n > 1$ og látum k vera jákvæða heiltölu. Lítið á margliðuna $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, þar sem P kemur k sinnum fyrir. Sannið að í mesta lagi séu til n heiltölur t þannig að $Q(t) = t$.

Dæmi 6. Úthlutum hverri hlið b í kúptum marghyrningi P mesta mögulega flatarmál þríhyrnings sem hefur b sem hlið og liggur í P. Sýnið að summa flatarmálanna sem hliðum P er úthlutað sé að minnsta kosti tvöfalt flatarmál P.

Tími: $4\frac{1}{2}$ klukkustundir
Hvert dæmi er sjö stiga virði

13 luglio 2006

Problema 4. Determinare tutte le coppie (x, y) di interi tali che

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problema 5. Sia $P(x)$ un polinomio di grado $n > 1$ con coefficienti interi e sia k un intero positivo. Consideriamo il polinomio $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, dove P compare k volte. Dimostrare che ci sono al più n interi t tali che $Q(t) = t$.

Problema 6. Assegniamo ad ogni lato b di un poligono convesso P la massima area di un triangolo che ha b come lato ed è contenuto in P. Dimostrare che la somma delle aree assegnate ai lati di P è maggiore o uguale al doppio dell'area di P.

Tempo: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti

2006 年 7 月 13 日

問題 4. 以下の等式をみたす整数の組 (x, y) をすべて求めよ．

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

問題 5. $P(x)$ を次数 $n\,(n > 1)$ の整数係数多項式とし，k を正整数とする．このとき，$Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$ を考える．ただし，P は k 回現れている．

$Q(t) = t$ をみたす整数 t は高々 n 個であることを示せ．

問題 6. 凸多角形 P の各辺 b に対して，b を 1 つの辺とする三角形であって P に含まれるものの面積の最大値を割りあてる．この凸多角形 P の各辺に割りあてられた面積の和は，P の面積の 2 倍以上であることを示せ．

試験時間：4 時間 30 分

各問 7 点

2006년 7월 13일

Problem 4. 다음의 방정식을 만족하는 정수쌍 (x, y) 를 모두 구하여라.

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problem 5. 정수 계수를 갖는 n 차 다항식 $P(x)$ 와 임의의 양의 정수 k 에 대하여, 다항식 $Q(x) = P(P(\cdots P(P(x))\cdots))$ 를 생각하자. 단, $n > 1$ 이고, P 는 k 번 나타난다. 이때, $Q(t) = t$ 를 만족하는 정수 t 의 개수는 n 개 이하임을 보여라.

Problem 6. 볼록다각형 P 의 각 변 b 에 대하여, b 를 한 변으로 가지면서 P 에 포함되는 삼각형의 최대넓이를 대응시키자. 볼록다각형 P 의 각 변에 대응되는 최대넓이들을 모두 더한 값은 P 의 넓이의 두 배 이상임을 보여라.

제한시간: 4시간 30분
문항당 7점

2006. gada 13. jūlijā

4. uzdevums. Noskaidrojiet, kuriem veselu skaitļu pāriem *(x,y)* ir spēkā vienādība

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2 .$$

5. uzdevums. Pieņemsim, ka *P(x)* ir *n*-tās pakāpes polinoms ar veseliem koeficientiem, *n>1*. Pieņemsim, ka *k* ir pozitīvs vesels skaitlis. Aplūkosim polinomu *Q(x)=P(P(...P(P(x))...))*, kur *P* parādās *k* reizes. Pierādiet, ka ir ne vairāk kā *n* tādu veselu skaitļu *t,* kuriem *Q(t) = t*.

6. uzdevums. Katrai izliekta daudzstūra *P* malai *b* piekārtojam maksimālo tāda trijstūra laukumu, kurš ietilpst daudzstūrī *P* un kuram *b* ir viena no malām. Pierādiet, ka visām daudzstūra *P* malām piekārtoto laukumu summa nav mazāka par divkāršotu daudzstūra *P* laukumu.

Risināšanas laiks: 4 stundas 30 minūtes
Katrs uzdevums ir 7 punktus vērts

2006 m. liepos 13 d.

4 uždavinys. Raskite visas tokias sveikųjų skaičių poras (x, y), kad

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

5 uždavinys. Sakykime, kad $P(x)$ yra laipsnio $n>1$ daugianaris su sveikaisiais koeficientais, o k – bet kuris natūralusis skaičius. Nagrinėkime daugianarį $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, kur P parašyta k kartų. Įrodykite, kad yra daugiausiai n tokių sveikųjų skaičių t, jog $Q(t)=t$.

6 uždavinys. Iškiliojo daugiakampio P kiekvienai kraštinei b priskirkime didžiausią plotą iš trikampių, turinčių kraštinę b ir esančių daugiakampyje P. Įrodykite, kad visoms daugiakampio P kraštinėms priskirtų plotų suma ne mažesnė už dvigubą P plotą.

Skirtas laikas 4 h 30 min

Kiekvienas uždavinys vertinamas 7 taškais

13 Јули, 2006

Задача 4. Најди ги сите парови (x, y) од цели броеви, такви да важи

$$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2}.$$

Задача 5. Нека $P(x)$ е полином од n - ти степен ($n>1$) со цели коефициенти и нека k е природен број. Да го разгледаме полиномот

$$Q(x)=P(P(\ldots P(P(x))\ldots)),$$

каде P се појавува k пати. Докажи дека постојат најмногу n цели броеви t такви да $Q(t)=t$.

Задача 6. На секоја страна b на конвексен многуаголник P ѝ ја придружуваме максималната плоштина на триаголникот, на кој една од страните се совпаѓа со b и кој е содржан во P. Докажи дека збирот од сите плоштини, придружени на страните на многуаголникот, е поголема или еднаква на двојната плоштина на многуаголникот.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода

13 Julai 2006

Masalah 4. Tentukan semua pasangan integer (x, y) sedemikian hingga

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Masalah 5. Misalkan $P(x)$ suatu polinomial berdarjah $n > 1$ dengan pekali integer dan misalkan k suatu integer positif. Pertimbangkan polinomial $Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots))$, yang P berulang k kali. Buktikan bahawa terdapat paling banyak n integer t sedemikian hingga $Q(t) = t$.

Masalah 6. Berikan kepada setiap sisi b bagi suatu poligon konveks P suatu nilai luas maksimum segitiga dengan b sebagai satu sisinya dan terkandung di dalam P. Tunjukkan bahawa hasil tambah luas yang diberikan pada semua sisi P adalah sekurang-kurangnya dua kali luas P.

Masa dibenarkan: 4 jam 30 minit
Setiap masalah bernilai 7 markah

2006 оны 7 сарын 13

Бодлого 4. $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$ байх бүхэл тооны бүх хос (x,y)-г ол.

Бодлого 5. $P(x)$ бүхэл коэффициенттэй $n>1$ зэргийн олон гишүүнт ба k дурын натурал тоо байг.

$$Q(x)=P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$$

олон гишүүнтийг авъя (энд P k удаа орсон). $Q(t)=t$ байх бүхэл тоо t n-ээс илүүгүй оршин байхыг батал.

Бодлого 6. Гүдгэр олон өнцөгт P-ийн b тал бүрт, энэ тал нь b-тэй давхцах P-д агуулагдах гурвалжнуудын талбайн хамгийн их утгыг харгалзуулъя. P-ийн бүх талуудад харгалзах талбайнуудын нийлбэр, P-ийн талбайг хоёр дахин авснаас багагүй гэж батал.

Бодох хугацаа: 4 цаг 30 минут
Бодлого бүр 7 оноо

13. juli 2006

Oppgave 4. Bestem alle par av heltall (x, y) slik at

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Oppgave 5. La $P(x)$ være et polynom av grad $n > 1$ med heltallige koeffisienter, og la k være et positivt heltall. Betrakt polynomet $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, med P skrevet k ganger. Vis at det finnes høyst n forskjellige heltall t slik at $Q(t) = t$.

Oppgave 6. Til hver side b av et konvekst polygon P tilegnes det maksimale arealet av trekanter inneholdt i P og med b som en av sidene. Vis at summen av disse tilegnede arealene er minst det dobbelte av arealet til P.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng

۱۳ جولای ۲۰۰٦

مساله ۴. همه زوج های صحیح (x, y) را بیابید که

$$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2}\,.$$

مساله ۵. فرض کنید $P(x)$ يك چند جمله ای از درجه $n>۱$ با ضرایب صحیح و k يك عدد صحيح مثبت باشد. چند جمله ای $Q(x)= P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$ را در نظر بگیرید که P در آن k بار ظاهر می شود. ثابت کنید حداکثر n عدد صحیح t وجود دارد به طوری که $Q(t)=t$.

مساله ۶. به هر ضلع b از یک چند ضلعی محدب P، بیشترین مساحت مثلثی را نسبت می دهیم که b را به عنوان ضلع دارد و در P قرار گرفته است. نشان دهید مجموع مساحت های نسبت داده شده به اضلاع P، حداقل دو برابر مساحت P است.

زمان: چهار ساعت و نیم
هر مساله هفت امتیاز دارد

13 lipca 2006 r.

Zadanie 4.
Wyznaczyć wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych, dla których
$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2\,.$$

Zadanie 5.
Niech $P(x)$ będzie wielomianem stopnia $n>1$ o współczynnikach całkowitych oraz niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą. Rozpatrujemy wielomian $Q(x)=P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, gdzie P występuje k razy. Wykazać, że istnieje co najwyżej n takich liczb całkowitych t, że $Q(t)=t$.

Zadanie 6.
Każdemu bokowi b wypukłego wielokąta P przyporządkowujemy największe pole trójkąta, którego jednym z boków jest odcinek b i który jest zawarty w wielokącie P. Udowodnić, że suma pól przyporządkowanych bokom wielokąta P jest nie mniejsza od podwojonego pola wielokąta P.

Czas na rozwiązywanie: 4 godziny 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów

13 de Julho de 2006

Problema 4. Determine todos os pares de inteiros (x, y) tais que

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problema 5. Seja $P(x)$ um polinomio de grau $n > 1$ com coeficientes inteiros e seja k um inteiro positivo. Considere o polinomio

$$Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots)),$$

onde P aparece k vezes. Prove que existem no máximo n inteiros t tais que $Q(t) = t$.

Problema 6. A cada lado b de um polígono convexo P associa-se a maior das áreas dos triângulos contidos em P que têm b como um dos lados. Prove que a soma das áreas associadas a todos os lados de P é pelo menos o dobro da área de P.

Duração da prova: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 7 pontos.

13 Iulie 2006

Problema 4. Determinaţi toate perechile (x, y) de numere întregi astfel încât

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problema 5. Fie $P(x)$ un polinom de grad $n > 1$ cu coeficienţi numere întregi şi fie k un număr natural nenul. Considerăm polinomul $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, unde P apare de k ori. Demonstraţi că există cel mult n numere întregi t astfel încât $Q(t) = t$.

Problema 6. Fie P un poligon convex. Asociem fiecărei laturi b a lui P aria maximă a unui triunghi conţinut în P şi în care una dintre laturi este b. Arătaţi că suma ariilor asociate laturilor poligonului P este cel puţin egală cu dublul ariei poligonului P.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte

13 июля 2006 года

Задача 4. Найдите все пары (x, y) целых чисел такие, что

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Задача 5. Пусть $P(x)$ – многочлен степени $n > 1$ с целыми коэффициентами, k – произвольное натуральное число. Рассмотрим многочлен

$$Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$$

(здесь P применен k раз). Докажите, что существует не более n целых чисел t таких, что $Q(t) = t$.

Задача 6. Каждой стороне b выпуклого многоугольника P поставлена в соответствие наибольшая из площадей треугольников, содержащихся в P, одна из сторон которых совпадает с b. Докажите, что сумма площадей, соответствующих всем сторонам P, не меньше удвоенной площади многоугольника P.

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов

13 ජූලි 2006

ගැටළුව 4. $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$ වන පූර්ණ නිඛිල යුගල (x, y) සොයන්න.

ගැටළුව 5. $P(x)$ යනු මාත්‍රය $n>1$ වන නිඛිල සංගුණක සහිත බහුපදයක්ද k යනු ධන නිඛිලයක්ද වේ. P k වාරයක් වන $Q(x)=P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$ බහුපදය සලකන්න. $Q(t)=t$ වන නිඛිල t වැඩිම වශයෙන් n ගණනක් ඇති බව පෙන්වන්න.

ගැටළුව 6. P උත්තල බහුඅස්‍රයක b නම් ඕනෑම පාදයකට එම b පාදය පාදයක් ලෙස හා P බහුඅස්‍රයේ ඇතුළත ඇති ත්‍රිකෝණයක විශාලම වර්ගඵලය පවරන්න. P හි පාද වලට පවරන වර්ගඵල වල එකතුව අවම වශයෙන් P හි වර්ගඵලය මෙන් දෙගුණයක් බව පෙන්වන්න.

කාලය : පැය 4 මිනිත්තු 30
ගැටළුවකට ලකුණු 7 ක් ලැබේ.

13. júl 2006

Úloha 4. Určte všetky dvojice (x, y) celých čísel takých, že

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Úloha 5. Nech $P(x)$ je polynóm stupňa $n > 1$ s celočíselnými koeficientmi a nech k je kladné celé číslo. Uvažujme polynóm $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, kde P sa vyskytuje k-krát. Dokážte, že existuje najviac n celých čísel t takých, že $Q(t) = t$.

Úloha 6. Každej strane b konvexného mnohouholníka P priradíme maximálny obsah trojuholníka, ktorého jedna strana je b a ktorý je obsiahnutý v P. Dokážte, že súčet obsahov priradených všetkým stranám mnohouholníka P je aspoň dvojnásobkom obsahu mnohouholníka P.

Čas na vypracovanie: 4 hodiny 30 minút.
Za každú úlohu možno získať 7 bodov.

13. julij 2006

Naloga 4. Določi vse pare celih števil (x, y), za katere velja

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Naloga 5. Naj bo $P(x)$ polinom stopnje n, $n > 1$, s celoštevilskimi koeficienti in naj bo k pozitivno celo število. Oglejmo si polinom $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, kjer se P pojavi k-krat. Dokaži, da obstaja največ n takšnih celih števil t, za katere velja $Q(t) = t$.

Naloga 6. Vsaki stranici b konveksnega večkotnika P priredimo največjo izmed ploščin trikotnikov, ki so vsebovani v P in katerih ena od stranic se ujema z b. Dokaži, da je vsota ploščin, ki so prirejene stranicam večkotnika P, vsaj dvakratnik ploščine večkotnika P.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.

13 de julio de 2006

Problema 4. Determine todas las parejas de enteros (x, y) tales que

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problema 5. Sea $P(x)$ un polinomio de grado $n > 1$ con coeficientes enteros y sea k un entero positivo. Considere el polinomio $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, donde P aparece k veces. Demuestre que hay a lo sumo n enteros t tales que $Q(t) = t$.

Problema 6. Asignamos a cada lado b de un polígono convexo P el área máxima que puede tener un triángulo que tiene a b como uno de sus lados y que está contenido en P. Demuestre que la suma de las áreas asignadas a los lados de P es mayor o igual que el doble del área de P.

Tiempo permitido: 4 horas 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos.

13. јули 2006.

Задатак 4. Одредите све парове (x, y) цијелих бројева такве да је
$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2.$$

Задатак 5. Нека је $P(x)$ полином степена n $(n>1)$ са цијелим коефицијентима и нека је k природан број. Посматрајмо полином
$$Q(x)=P\Big(P\big(\ldots P\big(P(x)\big)\ldots\big)\Big),$$
гдје се P појављује k пута. Докажите да постоји највише n цијелих бројева t таквих да је $Q(t)=t$.

Задатак 6. Свакој страници b конвексног полигона P придружимо највећу површину троугла који је садржан у P и чија је једна страница b. Докажите да је збир свих површина придружених страницама полигона P већи или једнак од двоструке површине полигона P.

Вријеме за рад: 4 часа и 30 минута
Сваки задатак вриједи 7 бодова

13. јули 2006.

Задатак 4. Одредите све парове (x, y) целих бројева такве да је

$$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2}.$$

Задатак 5. Нека је $P(x)$ полином степена n $(n>1)$ са целим коефицијентима и нека је k природан број. Посматрамо полином

$$Q(x)=P\Big(P\big(\ldots P\big(P(x)\big)\ldots\big)\Big),$$

где се P појављује k пута. Докажите да постоји највише n целих бројева t таквих да је $Q(t)=t$.

Задатак 6. Свакој страници b конвексног полигона P придружимо највећу површину троугла који је садржан у P и чија је једна страница b. Докажите да збир свих површина придружених страницама полигона P није мањи од двоструке површине полигона P.

Дозвољено време за рад: 4 часа и 30 минута
Сваки задатак се бодује са 7 поена

Den 13 juli 2006

Problem 4. Bestäm alla heltalspar (x, y) sådana att

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problem 5. Låt $P(x)$ vara ett polynom av grad n, $n > 1$, med heltalskoefficienter och låt k vara ett positivt heltal. Betrakta polynomet $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, där P förekommer k gånger. Visa att det finns som mest n heltal t sådana att $Q(t) = t$.

Problem 6. Låt P vara en konvex polygon. Till varje sida b av P tilldelas den maximala arean av en triangel som har b som en av sina sidor och som ligger inuti P. Visa att summan av areor som tilldelades polygonens alla sidor är minst två gånger arean av P.

Tillåten tid: 4 timmar 30 minuter
För varje uppgift kan man få upp till 7 poäng

47th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD SLOVENIA 2006

day: **2**

language: **Thai**

วันที่ ๑๓ กรกฎาคม ๒๕๔๙

โจทย์ข้อที่ ๔ จงหาคู่อันดับจำนวนเต็ม (x, y) ทั้งหมดซึ่ง

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2$$

โจทย์ข้อที่ ๕ ให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $n>1$ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก พิจารณาพหุนาม $Q(x)=P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$ เมื่อมี P ทั้งหมด k ตัว จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนเต็ม t อย่างมาก n ตัวซึ่ง $Q(t)=t$

โจทย์ข้อที่ ๖ กำหนดจำนวนจริงให้แต่ละด้าน b ของรูปหลายเหลี่ยมนูน P โดยที่จำนวนจริงดังกล่าวมีค่าเท่ากับพื้นที่ที่มากที่สุดของรูปสามเหลี่ยมซึ่งอยู่ภายใน P และมี b เป็นด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม จงแสดงว่าผลรวมของพื้นที่ทั้งหมดที่กำหนดให้กับด้านของ P มีค่าอย่างน้อยสองเท่าของพื้นที่ของ P

เวลาที่ให้: ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที

โจทย์แต่ละข้อมี ๗ คะแนน

13 Temmuz 2006

Problem 4. $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$ eşitliğini sağlayan tüm (x,y) tam sayı ikililerini belirleyiniz.

Problem 5. Katsayıları tam sayı ve derecesi $n>1$ olan bir $P(x)$ polinomu ile bir $k>0$ tam sayısı veriliyor. $Q(x)=P(P(\cdots P(P(x))\cdots))$, P nin k kez kullanılmasıyla tanımlanan polinom olmak üzere, $Q(t)=t$ eşitliğini sağlayan t tam sayılarının sayısının en fazla n olacağını ispatlayınız.

Problem 6. Dışbükey bir P çokgeninin her b kenarına, çokgenin dışına taşmayan ve kenarlarından birisi b olan üçgenlerin sahip olabileceği en büyük alan değeri karşı tutuluyor. P nin tüm kenarlarına karşı tutulan değerler toplamının, P nin alanının iki katından küçük olamayacağını gösteriniz.

Süre 4,5 saattir.
Her problem 7 puandır.

13 липня 2006 року

Задача 4. Знайдіть усі пари (x,y) цілих чисел такі, що

$$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2}.$$

Задача 5. Нехай $P(x)$ – многочлен степеня $n>1$ з цілими коефіцієнтами, k – довільне натуральне число. Розглянемо многочлен

$$Q(x)=P(P(\ldots P(P(x))\ldots)),$$

(тут P застосовується k разів).

Доведіть, що існує не більше, ніж n цілих чисел t таких, що $Q(t)=t$.

Задача 6. Кожній стороні в опуклого многокутника P поставлено у відповідність найбільшу з площ трикутників, які містяться в P і одна із сторін яких співпадає з в.

Доведіть, що сума площ, які відповідають усім сторонам P, не менша за подвоєну площу многокутника P.

Час виконання роботи: 4 години 30 хвилин.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

13 iyul 2006 yil

4-masala.

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2$$

tenglamani qanoatlantiradigan butun sonlarning barcha *(x,y)* juftliklarini toping.

5-masala. *P(x)* - darajasi *n>1* bo'lgan butun koeffitsientli ko'phad, *k* esa ixtiyoriy natural son bo'lsin.

$$Q(x)=P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$$

ko'phad qaralmoqda (bu yerda *P* *k* marta qo'llanilgan). *Q(t) =t* tenglamani qanoatlantiradigan va umumiy soni *n* dan ko'p bo'lmagan *t* butun sonlarning mavjudligini isbotlang.

6-masala. Qavariq ko'pburchakning har bir *b* tomoniga shu ko'pburchakga tegishli va bir tomoni *b* bilan ustma-ust tushqan uchburchaklar yuzalaridan eng kattasi mos qo'yilgan. Ko'pburchakning barcha tomonlariga mos qo'yilgan yuzalarning yig'indisi ko'pburchak yuzining ikkilanganidan kichik emasligini isbotlang.

Ajratilgan vaqt : *4 soat 30 minut*
Har bir masala 7 ball bilan baholanadi

Ngày 13 Tháng 7 Năm 2006

Bài 4. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) sao cho

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Bài 5. Cho $P(x)$ là một đa thức bậc $n > 1$ với hệ số nguyên và k là một số nguyên dương. Xét đa thức $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, trong đó P xuất hiện k lần. Chứng minh rằng có không quá n số nguyên t thỏa mãn $Q(t) = t$.

Bài 6. Gán cho mỗi cạnh b của một đa giác lồi P diện tích lớn nhất của tam giác nằm trong P và nhận b làm cạnh. Chứng minh rằng tổng tất cả các diện tích được gán cho các cạnh của đa giác lồi P không nhỏ hơn hai lần diện tích P.

Thời gian làm bài: 4 giờ 30 phút
Mỗi bài được 7 điểm