13 Ιουλίου 2006

Πρόβλημα 4. Να βρεθούν όλα τα ζεύγη ακεραίων αριθμών *(x,y)* τέτοιων ώστε

$$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2}.$$

Πρόβλημα 5. Έστω *P(x)* ενα πολυωνυμο βαθμού *n>1* με ακέραιους συντελεστές και έστω *k* ένας θετικός ακέραιος. Θεωρούμε το πολυώνυμο *Q(x)=P(P(...P(P(x))...))*, όπου το *P* εμφανίζεται *k* φορές. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν το πολύ *n* ακέραιοι *t* τέτοιοι ώστε *Q(t) = t*.

Πρόβλημα 6. Αντιστοιχούμε σε κάθε πλευρά *b* ενός κυρτού πολύγωνου *P* το μέγιστο εμβαδόν ενός τρίγωνου το οποίο περιέχεται στο *P* και έχει την *b* ως μια πλευρά του. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των εμβαδών που αντιστοιχούν στις πλευρές του *P* είναι τουλάχιστον διπλάσιο του εμβαδού του *P*.

Διάρκεια εξέτασης: 4 ώρες και 30 λεπτά
Μέγιστη βαθμολογία κάθε προβλήματος: 7 μονάδες